© Репетитор по математике Ольшевский Андрей Георгиевич
Консультирую по скайп: da.irk.ru
Сайт www.super-code.ru наполняется бесплатными книгами

Векторы в пространстве, способы решения задач, формулы

Иркутск
2017

Оглавление

1 Векторы в пространстве

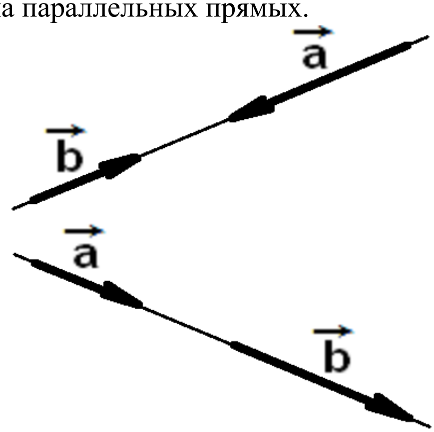
Векторы в пространстве включают геометрия 10, 11 класс и аналитическая геометрия. Векторы позволяют эффектно решать геометрические задачи второй части ЕГЭ и аналитической геометрии в пространстве. Векторы в пространстве даются так же как и векторы на плоскости, но учитывается третья координата z. Исключение из векторов в пространстве третьего измерения дает векторы на плоскости.

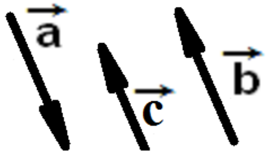
1.1 Вектор на плоскости и в пространстве

Вектором называется направленный отрезок с началом и концом, изображаемым на рисунке стрелкой. Произвольная точка пространства может считаться нулевым вектором. Нулевой вектор не имеет конкретного направления, так как начало и конец совпадают, поэтому ему можно придать любое направление.

Длина (модуль) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ - это длина отрезка AB, которая обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $\left|\vec{a}\right|$. Нулевой вектор имеет длину равную нулю $\left|\vec{0}\right| = 0$.

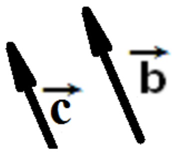
Коллинеарными называются ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.





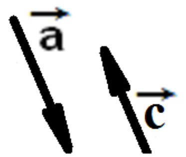
Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Сонаправленными называются коллинеарные ненулевые векторы, имеющие одно направление. Сонаправленные векторы обозначаются знаком ↑↑. Например, если вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$, то используется запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

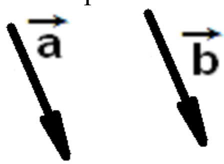


Нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.

Противоположно направленными называются два коллинеарных ненулевых вектора, имеющих противоположное направление. Противоположно направленные векторы обозначаются знаком ↑↓. Например, если вектор $\vec{a}$ противоположно направлен вектору $\vec{b}$, то используется запись $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



Равными называются сонаправленные векторы равной длины.



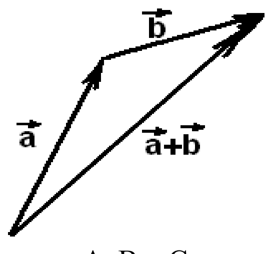
Многие физические величины являются векторными величинами: сила, скорость, электрическое поле.

Если не задана точка приложения (начала) вектора, то она выбирается произвольно.

Если в точку О поместить начало вектора, то считается, что вектор отложен от точки О. Из любой точки можно отложить единственный вектор, равный данному вектору.

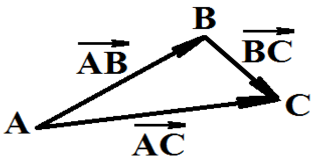
1.2 Сумма векторов

При сложении векторов по правилу треугольника из конца первого вектора проводится второй вектор и суммой двух данных векторов является вектор, проведенный из начала первого вектора к концу второго вектора:

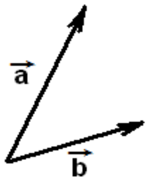


Для произвольных точек A, B и C можно написать сумму векторов:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

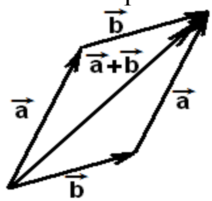


Если два вектора выходят из одной точки



то их лучше складывать по правилу параллелограмма.

При сложении двух векторов по правилу параллелограмма, складываемые векторы откладываются из одной точки, из концов этих векторов достраивается параллелограмм путем прикладывания к концу одного вектора начала другого. Вектор, образованный диагональю параллелограмма, берущий начало от точки начала складываемых векторов, будет являться суммой векторов

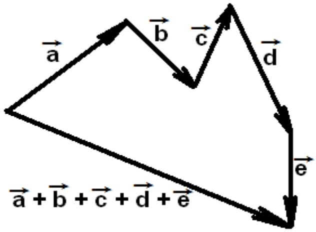


Правило параллелограмма содержит в себе разный порядок сложения векторов по правилу треугольника.

Законы сложения векторов:

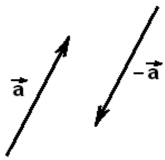
1. Переместительный закон $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. Сочетательный закон $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Если необходимо сложить несколько векторов, то векторы складываются попарно или по правилу многоугольника: к концу первого вектора прикладывается начало второго, к концу второго - прикладывается начало третьего и т. д. Вектор, являющийся суммой векторов, проводится от начала первого вектора до конца последнего вектора.



По законам сложения векторов порядок сложения векторов не влияет на результирующий вектор, являющийся суммой нескольких векторов.

Противоположными называются два ненулевых противоположно направленных вектора равной длины. Вектор $-\vec{a}$ является противоположным вектору $\vec{a}$



Эти векторы противоположно направленные и равны по модулю.
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

1.3 Разность векторов

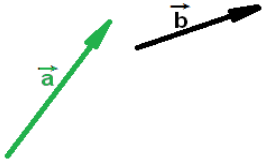
Разность векторов можно записать в виде суммы векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

где "$-\vec{b}$" - вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

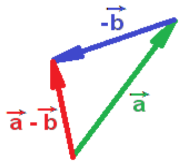
Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{b}$ можно складывать по правилу треугольника или параллелограмма.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

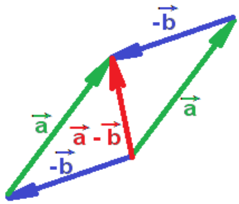


Для нахождения разности векторов $\vec{a} - \vec{b}$ строим вектор $-\vec{b}$

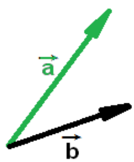
Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{b}$ складываем по правилу треугольника, прикладывая к концу вектора $\vec{a}$ начало вектора $-\vec{b}$, получили вектор $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$



Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{b}$ складываем по правилу параллелограмма, отложив начала векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$ из одной точки

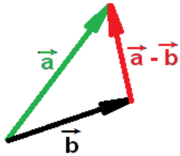


Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ берут начало из одной точки



,

то разность векторов $\vec{a} - \vec{b}$ дает вектор, соединяющий их концы и стрелка на конце результирующего вектора ставится в направлении того вектора, от которого отнимают второй вектор



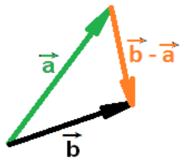


Рисунок ниже демонстрирует сложение и разность векторов

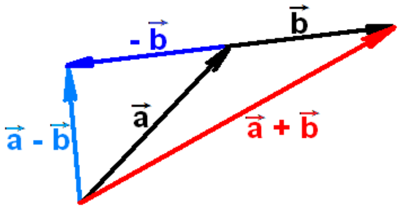
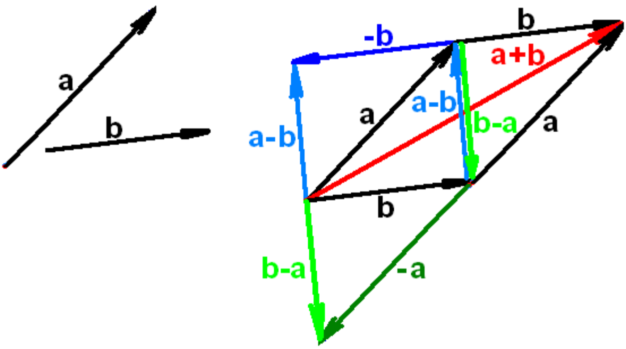
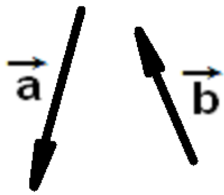


Рисунок ниже демонстрирует сложение и разность векторов разными способами



Задача. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Изобразить сумму и разность векторов всеми возможными способами во всевозможных сочетаниях векторов.

1.4 Лемма о коллинеарных векторах

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

1.5 Произведение вектора на число

Произведение ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k дает вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$. Длина вектора $\vec{b}$:

$$|\vec{b}| = |k|\cdot|\vec{a}|$$

Если $k > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные.

Если $k = 0$, то вектор $\vec{b}$ нулевой.

Если $k < 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные.

Если $|k| = 1$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равной длины.

Если $k = 1$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равные векторы.

Если $k = -1$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположные векторы.

Если $|k| > 1$, то длина вектора $\vec{b}$ больше длины вектора $\vec{a}$.

Если $k > 1$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные и длина $\vec{b}$ больше длины вектора $\vec{a}$.

Если $k < -1$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные и длина $\vec{b}$ больше длины вектора $\vec{a}$.

Если $|k| < 1$, то длина вектора $\vec{b}$ меньше длины вектора $\vec{a}$.

Если $0 < k < 1$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные и длина $\vec{b}$ меньше длины вектора $\vec{a}$.

Если -1 < k < 0, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные и длина $\vec{b}$ меньше длины вектора $\vec{a}$.

Произведение нулевого вектора на число дает нулевой вектор.

Задача. Дан вектор $\vec{a}$.

Построить векторы $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$, $0{,}5\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$.

Задача. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Построить векторы $3\vec{a} + 2\vec{b}$, $2\vec{a} - 2\vec{b}$, $-2\vec{a} - \vec{b}$.

Законы, описывающие умножение вектора на число

1. Сочетательный закон $(kn)\vec{a} = k(n\vec{a})$
2. Первый распределительный закон $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
3. Второй распределительный закон $(k + n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$.

Для коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \neq 0$, существует единственное число k, позволяющее выразить вектор $\vec{b}$ через $\vec{a}$:

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

1.6 Компланарные векторы

Компланарными называются векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если провести векторы, равные данным компланарным векторам из одной точки, то они будут лежать в одной плоскости. Поэтому можно сказать, что компланарными называются векторы, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Два произвольных вектора всегда компланарны. Три вектора могут быть компланарными или не компланарными. Три вектора, из которых хотя бы два коллинеарные, компланарны. Коллинеарные векторы всегда компланарны.

1.7 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

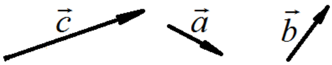
Любой вектор $\vec{c}$ единственным образом разлагается на плоскости по двум неколлинеарным ненулевым векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с единственными коэффициентами разложения x и y:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

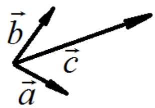
Любой вектор $\vec{c}$, компланарный ненулевым векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, единственным образом разлагается по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с единственными коэффициентами разложения x и y:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

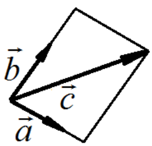
Разложим на плоскости заданный вектор $\vec{c}$ по данным неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:



Проведем из одной точки заданные компланарные векторы



Из конца вектора $\vec{c}$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ до пересечения с прямыми, проведенными через вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получим параллелограмм

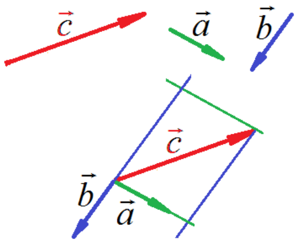


Длины сторон параллелограмма получаются путем умножения длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на числа x и y, которые определяются путем деления длин сторон параллелограмма на длины соответствующих им векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получаем разложение вектора $\vec{c}$ по заданным неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

В решаемой задаче x ≈ 1,3, y ≈ 1,9, поэтому разложение вектора $\vec{c}$ по заданным неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать в виде

$$\vec{c} = 1{,}3\vec{a} + 1{,}9\vec{b}.$$



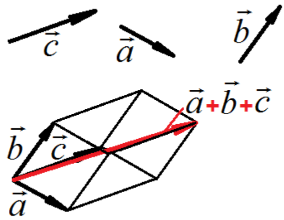
В решаемой задаче x ≈ 1,3, y ≈ -1,9, поэтому разложение вектора $\vec{c}$ по заданным неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать в виде

$$\vec{c} = 1{,}3\vec{a} - 1{,}9\vec{b}.$$

1.8 Правило параллелепипеда

Параллелепипед - это объемная фигура, противоположные грани которой состоят из двух равных параллелограммов, лежащих в параллельных плоскостях.

Правило параллелепипеда позволяет складывать три некомпланарных вектора, которые откладываются из одной точки и строится параллелепипед так, чтобы суммируемые векторы образовывали его ребра, а остальные ребра параллелепипеда были соответственно параллельны и равны длинам ребер, образованных суммируемыми векторами. Диагональ параллелепипеда образует вектор, являющийся суммой заданных трех векторов, который начинается из точки начала складываемых векторов.



1.9 Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Любой вектор $\vec{p}$ разлагается по трем заданным некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с единственными коэффициентами разложения x, y, z:

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

1.10 Прямоугольная система координат в пространстве

В трехмерном пространстве прямоугольная система координат Oxyz задается началом координат O и пересекающими в ней взаимно перпендикулярными координатными осями Ox, Oy и Oz с выбранными положительными направлениями, указанными стрелками, и единицей измерения отрезков. Если масштаб отрезков одинаковый по всем трем осям, то такая система называется декартовой системой координат.

Координата x называется абсциссой, y - ординатой, z - аппликатой. Координаты точки M записываются в скобках M (x; y; z).

1.11 Координаты вектора в пространстве

В пространстве зададим прямоугольную систему координат Oxyz. От начала координат в положительных направлениях осей Ox, Oy, Oz проведем соответствующие единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, которые называются координатными векторами и некомпланарны. Поэтому любой вектор $\vec{a}$ разлагается по трем заданным некомпланарным координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ с единственными коэффициентами разложения x, y, z:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Коэффициенты разложения x, y, z являются координатами вектора $\vec{a}$ в заданной прямоугольной системе координат, которые записываются в скобках $\vec{a}$ (x; y; z). Нулевой вектор имеет координаты равные нулю $\vec{0}$ (0; 0; 0). У равных векторов соответствующие координаты равны.

Правила нахождения координат результирующего вектора:

1. При суммировании двух и более векторов каждая координата результирующего вектора равна сумме соответствующих координат заданных векторов. Если даны два вектора $\vec{a}$ (x_1; y_1; z_1) и $\vec{b}$ (x_1; y_1; z_1), то сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}$ дает вектор с координатами ($x_1 + x_1$; $y_1 + y_1$; $z_1 + z_1$)

$$\vec{a}+\vec{b} = (x_1 + x_1; y_1 + y_1; z_1 + z_1)$$

2. Разность является разновидностью суммы, поэтому разность соответствующих координат дает каждую координату вектора, полученного при вычитании двух заданных векторов. Если даны два вектора $\vec{a}$ (x_a; y_a; z_a) и $\vec{b}$ (x_b; y_b; z_b), то разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$ дает вектор с координатами ($x_a - x_b$; $y_a - y_b$; $z_a - z_b$)

$$\vec{a}-\vec{b} = (x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b)$$

3. При умножении вектора на число каждая координата результирующего вектора равна произведению этого числа на соответствующую координату заданного вектора. Если даны число k и вектор $\vec{a}$ (x; y; z), то умножение вектора на число k дает вектор $k\vec{a}$ с координатами

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz).$$

Задача. Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$, если координаты векторов $\vec{a}$ (1; -2; -1), $\vec{b}$ (-2; 3; -4), $\vec{c}$ (-1; -3; 2).

Решение

$$\vec{p} = 2\vec{a} + (-3\vec{b}) + 4\vec{c}$$

$$2\vec{a} = (2\cdot1; 2\cdot(-2); 2\cdot(-1)) = (2; -4; -2);$$

$$-3\vec{b} = (-3\cdot(-2); -3\cdot 3; -3\cdot(-4)) = (6; -9; 12);$$

$$4\vec{c} = (4\cdot(-1); 4\cdot(-3); 4\cdot 2) = (-4; -12; 8).$$

$$\vec{p} = (2 + 6 - 4; -4 - 9 -12; -2 + 12 + 8) = (4; -25; 18).$$

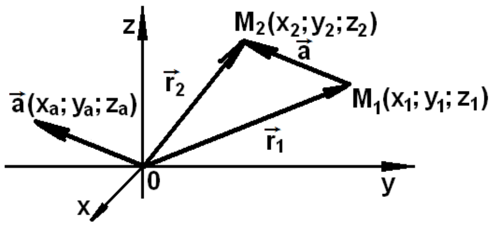
1.12 Координаты вектора, радиус-вектора и точки

Координаты вектора - это координаты конца вектора, если начало вектора поместить в начало координат.

Радиус-вектор - это вектор, проведенный из начала координат к данной точке, координаты радиус-вектора и точки равны.

Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ задан точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то каждая из его координат равна разности соответствующих координат конца и начала вектора

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$



Для коллинеарных векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, если $\vec{a} \neq 0$, существует единственное число k, позволяющее выразить вектор $\vec{b}$ через $\vec{a}$:

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

Тогда координаты вектора $\vec{b}$ выражаются через координаты вектора $\vec{a}$

$$\vec{b} = (kx_1; ky_1; kz_1)$$

Отношение соответствующих координат коллинеарных векторов равно единственному числу k

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = k$$

1.13 Длина вектора и расстояние между двумя точками

Длина вектора $\vec{a}$ (x; y; z) равна корню квадратному из суммы квадратов его координат

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, заданного точками начала $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и конца $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ равна корню квадратному из суммы квадратов разности соответствующих координат конца вектора и начала

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

На плоскости отсутствует координата z

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(2+3)^2 + (-3)^2} =$$
$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Расстояние между точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1.14 Координаты середины отрезка

Если точка C - середина отрезка AB, то радиус-вектор точки C в произвольной системе координат с началом в точке O равен половине суммы радиус-векторов точек A и B

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

Если координаты векторов $\overrightarrow{OC}$ (x; y; z), $\overrightarrow{OA}$ (x_1; y_1; z_1), $\overrightarrow{OB}$ (x_2; y_2; z_2), то каждая координата вектора $\overrightarrow{OC}$ равна половине суммы соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$

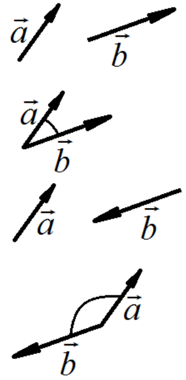
$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

$$\overrightarrow{OC} = (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2); \frac{1}{2}(y_1 + y_2); \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right)$$

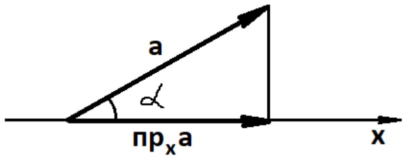
Каждая из координат середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов отрезка.

1.15 Угол между векторами

Угол между векторами – равен углу между проведенными из одной точки лучами, сонаправленными с этими векторами. Угол между векторами может быть от 0^0 до 180^0 включительно. Угол между сонаправленными векторами равен 0^0. Если один вектор или оба нулевые, то угол между векторами, хотя бы один из которых нулевой, равен 0^0. Угол между перпендикулярными векторами равен 90^0. Угол между противоположно направленными векторами 180^0.



1.16 Проекция вектора



1.17 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов – это число (скаляр), равное произведению длин векторов на косинус угла между векторами

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

Если $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 0^0$, то векторы сонаправлены $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \cos$ $0^0 = 1$, следовательно, скалярное произведение сонаправленных векторов равно произведению их длин (модулей)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Если угол между векторами $0 < \widehat{\vec{a},\vec{b}} < 90^0$, то косинус угла между такими векторами больше нуля $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) > 0$, следовательно скалярное произведение больше нуля $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.

Если ненулевые векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, так как cos $90^0 = 0$. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

Если $\widehat{\vec{a},\vec{b}} > 90^0$, то косинус угла между такими векторами меньше нуля $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) < 0$, следовательно скалярное произведение меньше нуля $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

При увеличении угла между векторами косинус угла между ними $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ уменьшается и достигает минимального значения при $\widehat{\vec{a},\vec{b}} =$ 180^0, когда векторы противоположно направлены $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Так как cos 180^0 = -1, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Скалярное произведение противоположно направленных векторов равно отрицательному произведению их длин (модулей).

Скалярный квадрат вектора равен модулю вектора в квадрате

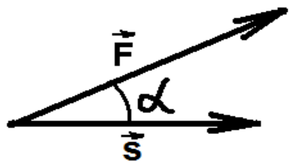
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение векторов, по крайней мере один из которых нулевой, равно нулю.

1.18 Физический смысл скалярного произведения векторов

Из курса физики известно, что работа A силы $\vec{F}$ при перемещении тела $\vec{s}$ равна произведению длин векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$ на косинус угла между ними, то есть равна скалярному произведению векторов силы и перемещения

$$\mathrm{A} = \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\mathrm{s}} = |\vec{\mathrm{F}}||\vec{\mathrm{s}}|\cos\left(\widehat{\vec{\mathrm{F}},\vec{\mathrm{s}}}\right)$$



Если вектор силы $\vec{F}$ сонаправлен с перемещением тела $\vec{s}$, то угол между векторами $\widehat{\vec{F},\vec{s}} = 0^0$, следовательно работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ максимальна и равна A = $|\vec{\mathrm{F}}||\vec{\mathrm{s}}|$.

Если 0 < $\widehat{\vec{F},\vec{s}}$ < 90^0, то работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ положительна A > 0.

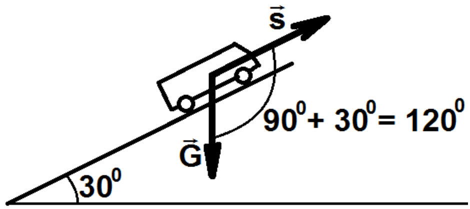
Если $\widehat{\vec{F},\vec{s}} = 90^0$, то работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ равна нулю A = 0.

Если $90^0 < \widehat{\vec{F},\vec{s}} < 180^0$, то работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ отрицательна A < 0.

Если вектор силы $\vec{F}$ противоположно направлен перемещению тела $\vec{s}$, то угол между векторами $\widehat{\vec{F},\vec{s}} = 180^0$, следовательно работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ отрицательна и равна $A = -|\vec{F}||\vec{s}|$.

Задача. Определить работу силы тяжести при подъеме легкового автомобиля массой 1 тонна по трассе длинной 1 км, имеющей угол наклона 30^0 к горизонту. Сколько литров воды при температуре 20^0 можно вскипятить, используя эту энергию?

Решение



Работа A силы тяжести $\vec{G}$ при перемещении тела $\vec{s}$ равна произведению длин векторов $\vec{G}$ и $\vec{s}$ на косинус угла между ними, то есть равна скалярному произведению векторов силы тяжести и перемещения

$$A = \vec{G} \cdot \vec{s} = |\vec{G}| \cdot |\vec{s}| \cos\left(\widehat{\vec{G},\vec{s}}\right)$$

Сила тяжести

$$G = mg = 1000 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 10\ 000 \text{ Н}.$$

$$|\vec{s}| = 1000 \text{ м}.$$

Угол между векторами $\widehat{\vec{G},\vec{s}} = 120^0$. Тогда

$$\cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -0{,}5.$$

Подставляем

$$A = 10\,000 \text{ Н} \cdot 1000 \text{ м} \cdot (-0{,}5) = -5\,000\,000 \text{ Дж} = -5 \text{ МДж}.$$

1.19 Скалярное произведение векторов в координатах

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ в прямоугольной системе координат равно сумме произведений одноименных координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

1.20 Условие перпендикулярности векторов

Если ненулевые векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

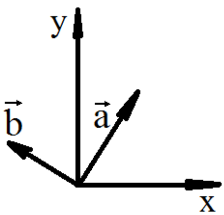
Если задан один ненулевой вектор $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, то координаты перпендикулярного (нормального) ему вектора $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ должны удовлетворять равенству

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Таких векторов $\vec{b}$ бесконечное множество.

Если на плоскости задан один ненулевой вектор $\vec{a} = (x_1; y_1)$, то координаты перпендикулярного (нормального) ему вектора $\vec{b} = (x_2; y_2)$ должны удовлетворять равенству

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$



Если на плоскости задан ненулевой вектор $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, то достаточно задать произвольно одну из координат перпендикулярного (нормального) ему вектора $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ и из условия перпендикулярности векторов

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

выразить вторую координату вектора $\vec{b}$.

Например, если подставить произвольную координату x_2, то

$$y_1y_2 = -\ x_1x_2.$$

Вторая координата вектора $\vec{b}$

$$y_2 = -\frac{x_1x_2}{y_1}$$

Если придать $x_2 = y_1$, то вторая координата вектора $\vec{b}$

$$y_2 = -\frac{x_1y_1}{y_1} = -x_1$$

Если на плоскости задан ненулевой вектор $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, то перпендикулярный (нормальный) ему вектор $\vec{b} = (y_1;\ -x_1)$.

Если одна из координат ненулевого вектора $\vec{a}$ равна нулю, то у вектора $\vec{b}$ такая же координата не равна нулю, а вторая координата равна нулю. Такие векторы лежат на осях координат, поэтому перпендикулярны.

Определим второй вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, но противоположный вектору $\vec{b}$, то есть вектор $-\vec{b}$. Тогда достаточно поменять знаки координат вектора $\vec{b}$

$$-\vec{b} = (-y_1;\ x_1)$$

Координаты двух векторов, перпендикулярных вектору $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ на плоскости

$$\vec{b}_1 = (y_1; -x_1),$$

$$\vec{b}_2 = (-y_1; x_1).$$

Задача. Задан вектор $\vec{a} = (3; -5)$. Найти два нормальных вектора с различной ориентацией.

Решение

Координаты двух векторов, перпендикулярных вектору $\vec{a} = (x_1; y_1)$ на плоскости

$$\vec{b}_1 = (y_1; -x_1),$$

$$\vec{b}_2 = (-y_1; x_1).$$

Подставляем координаты вектора $\vec{a} = (3; -5)$

$$\vec{b}_1 = (-5; -3),$$

$$\vec{b}_2 = (-(-5); 3) = (5; 3).$$

Для проверки перпендикулярности векторов подставим их координаты в условие перпендикулярности векторов

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$3\cdot(-5) + (-5)\cdot(-3) = -15 + 15 = 0$$

верно!

$$3\cdot 5 + (-5)\cdot 3 = 15 - 15 = 0$$

верно!

Ответ: $\vec{b}_1 = (-5; -3)$, $\vec{b}_2 = (5; 3)$.

Если присвоить $x_2 = 1$, подставить

$$x_1 + y_1y_2 = 0.$$

$$y_1y_2 = -x_1$$

Получим координату y_2 вектора, перпендикулярного вектору $\vec{a} = (x_1; y_1)$

$$y_2 = -\frac{x_1}{y_1}$$

Координаты одного вектора, перпендикулярного на плоскости вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1)

$$\vec{b}_1 = \left(1; -\frac{x_1}{y_1}\right)$$

Для получения второго вектора, перпендикулярного вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1), но противоположно направленного вектору $\vec{b}_1$. Пусть

$$\vec{b}_2 = -\vec{b}_1$$

Тогда достаточно поменять знаки координат вектора $\vec{b}_1$.

Координаты второго вектора, перпендикулярного на плоскости вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1)

$$\vec{b}_2 = \left(-1; \frac{x_1}{y_1}\right)$$

Координаты двух векторов, перпендикулярных вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1) на плоскости

$$\vec{b} = \left(\pm 1; \mp \frac{x_1}{y_1}\right)$$

Задача. Задан вектор $\vec{a}$ = (3; -5). Найти два нормальных вектора с различной ориентацией.

Решение

Координаты двух векторов, перпендикулярных вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1) на плоскости

$$\vec{b} = \left(\pm 1; \mp \frac{x_1}{y_1} \right)$$

$$\vec{b} = \left(\pm 1; \mp \frac{3}{-5} \right)$$

$$\vec{b} = \left(\pm 1; \pm \frac{3}{5} \right)$$

$$\vec{b} = (\pm 1; \pm 0,6)$$

Координаты одного вектора

$$\vec{b}_1 = (1;0,6)$$

Координаты второго вектора

$$\vec{b}_2 = (-1;-0,6)$$

Для проверки перпендикулярности векторов подставим их координаты в условие перпендикулярности векторов

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$3 \cdot 1 + (-5) \cdot 0,6 = 3 - 3 = 0$$

верно!

$$3 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-0,6) = -3 + 3 = 0$$

верно!

Ответ: $\vec{b}_1 = (1;0,6)$ и $\vec{b}_2 = (-1;-0,6)$.

Если присвоить $x_2 = - x_1$, подставить

$$x_1(-x_1) + y_1y_2 = 0.$$

$$-x_1^2 + y_1y_2 = 0.$$

$$y_1y_2 = x_1^2$$

Получим координату вектора, перпендикулярного вектору $\vec{a}$

$$y_2 = \frac{x_1^2}{y_1}$$

Если присвоить $x_2 = x_1$, подставить

$$x_1 x_1 + y_1 y_2 = 0.$$

$$x_1^2 + y_1 y_2 = 0.$$

$$y_1 y_2 = -x_1^2$$

Получим координату y второго вектора, перпендикулярного вектору $\vec{a}$

$$y_2 = -\frac{x_1^2}{y_1}$$

Координаты одного вектора, перпендикулярного на плоскости вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1)

$$\vec{b} = \left(-x_1; \frac{x_1^2}{y_1} \right)$$

Координаты второго вектора, перпендикулярного на плоскости вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1)

$$\vec{b} = \left(x_1; -\frac{x_1^2}{y_1} \right)$$

Координаты двух векторов, перпендикулярных вектору $\vec{a}$ = (x_1; y_1) на плоскости

$$\vec{b} = \left(\pm x_1; \mp \frac{x_1^2}{y_1} \right)$$

1.21 Косинус угла между векторами

Косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ равен скалярному произведению векторов, деленному на произведение длин этих векторов

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Если $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 1$, то угол между векторами равен 0^0, векторы сонаправлены.

Если $0 < \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) < 1$, то $0^0 < \widehat{\vec{a}\vec{b}} < 90^0$.

Если $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0$, то угол между векторами равен 90^0, векторы перпендикулярны.

Если $-1 < \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) < 0$, то $90^0 < \widehat{\vec{a}\vec{b}} < 180^0$.

Если $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = -1$, то угол между векторами равен 180^0, векторы противоположно направлены.

Если какой-то вектор задан координатами начала и конца, то отнимая от соответствующих координат конца вектора координаты начала, получаем координаты этого вектора.

Задача. Найти угол между векторами $\vec{a}$ (0; -2; 0), $\vec{b}$ (-2; 0; -4).

Решение

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot(-2) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot(-4) = 0,$$

следовательно угол между векторами равен $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 90^0$.

1.22 Свойства скалярного произведения векторов

Свойства скалярного произведения справедливы при любых $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, k:

1. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}\,|^2 \geq 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}\,|^2 > 0$, если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}\,|^2 = 0$.

2. Переместительный закон $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

3. Распределительный закон $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

4. Сочетательный закон $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

1.23 Направляющий вектор прямой

Направляющий вектор прямой - это ненулевой вектор, лежащий на прямой или на прямой, параллельной данной прямой.

Если прямая задана двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то направляющим является вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ или противоположный ему вектор $\overrightarrow{M_2M_1} = -\overrightarrow{M_1M_2}$, координаты которых

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

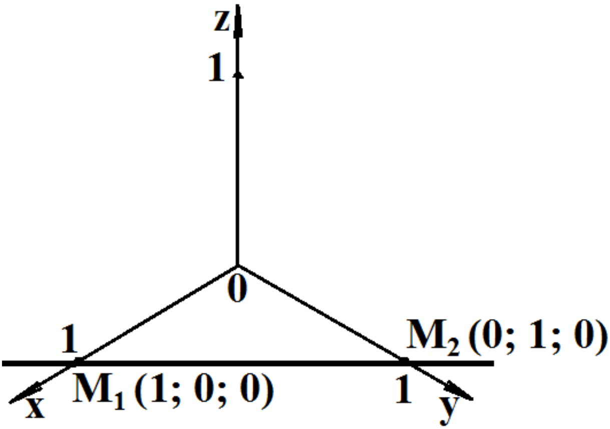
$$\overrightarrow{M_2M_1} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2) .$$

Систему координат желательно задать так, чтобы прямая проходила через начало координат, тогда координаты единственной точки на прямой и будут координатами направляющего вектора.

Задача. Определить координаты направляющего вектора прямой, проходящей через точки M_1 (1; 0; 0), M_2 (0; 1; 0).

Решение

Построим заданные точки в системе координат Oxyz.

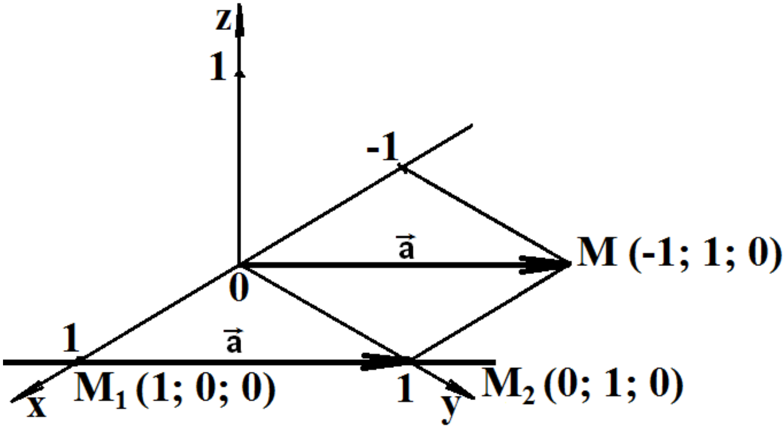


Направляющий вектор прямой проходящей через точки M_1(1; 0; 0), M_2 (0; 1; 0) обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Каждая из его координат равна разности соответствующих координат конца и начала вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (0 - 1; 1 - 0; 0 - 0) = (-1; 1; 0)$$

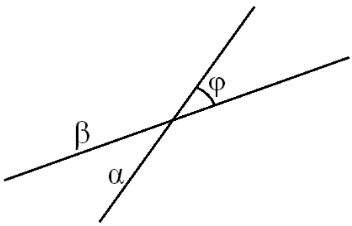
Изобразим направляющий вектор прямой в системе координат с началом в точке M_1, с концом в точке M_2 и равный ему вектор $\overrightarrow{OM}$ из начала координат с концом в точке M (-1; 1; 0)



1.24 Угол между двумя прямыми

Возможные варианты взаимного расположения 2-х прямых на плоскости и угла между такими прямыми:

1. Прямые пересекаются в единственной точке, образуя 4 угла, 2 пары вертикальных углов попарно равны. Угол φ между двумя пересекающимися прямыми является углом, не превышающим три других угла между этими прямыми. Поэтому угол между прямыми $\varphi \le 90^0$.



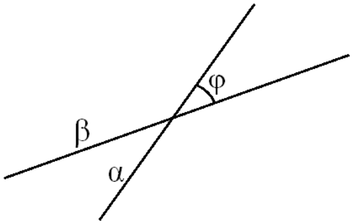
Пересекающиеся прямые могут быть, в частности, перпендикулярны $\varphi = 90^0$.

2. Прямые параллельны, то есть не совпадают и не пересекаются, $\varphi=0^0$.

3. Прямые совпадают, $\varphi = 0^0$.

Возможные варианты взаимного расположения 2-х прямых в пространстве и угла между такими прямыми:

1. Прямые пересекаются в единственной точке, образуя 4 угла, 2 пары вертикальных углов попарно равны. Угол φ между двумя пересекающимися прямыми является углом, не превышающим три других угла между этими прямыми.



2. Прямые параллельны, то есть не совпадают и не пересекаются, $\varphi=0^0$.

3. Прямые совпадают, $\varphi = 0^0$.

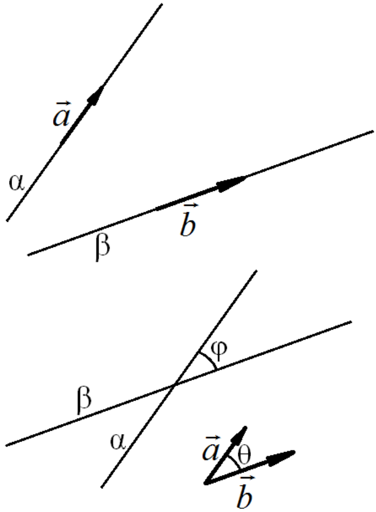
4. Прямые скрещиваются, то есть не пересекаются в пространстве и не параллельны. Углом φ между скрещивающимися прямыми является угол между прямыми, проведенными параллельно этим прямым так, чтобы они пересекались. Поэтому угол между прямыми $\varphi \le 90^0$.

Угол между 2-мя прямыми равен углу между прямыми, проведенными параллельно этим прямым в одной плоскости. Поэтому угол между прямыми $0^0 \le \varphi \le 90^0$.

Угол θ (тета) между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $0^0 \le \theta \le 180^0$.

Если угол φ между прямыми α и β равен углу θ между направляющими векторами этих прямых $\varphi = \theta$, то

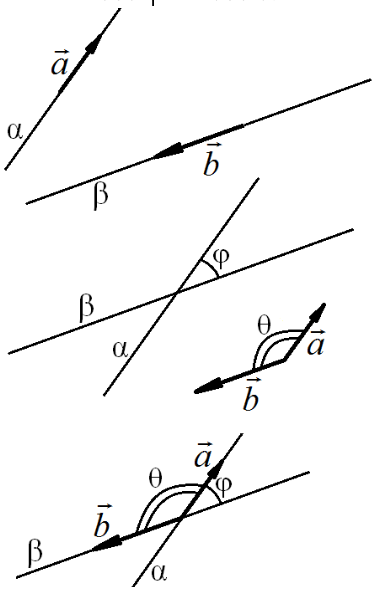
$$\cos \varphi = \cos \theta.$$



Если угол между прямыми $\varphi = 180^0 - \theta$, то

$$\cos\varphi = \cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta.$$

$$\cos\varphi = -\cos\theta.$$



Поэтому косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между векторами

$$\cos\varphi = |\cos\theta|.$$

Если заданы координаты ненулевых векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то косинус угла θ между ними

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых

$$\cos\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\, x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \,|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Прямые являются одинаковыми геометрическими объектами, поэтому и одинаковые тригонометрические функции cos присутствуют в формуле.

Если каждая из двух прямых задана двумя точками, то можно определить направляющие векторы этих прямых и косинус угла между прямыми.

Если $\cos\varphi = 1$, то угол φ между прямыми равен 0^0, можно принять для этих прямых один из направляющих векторов этих прямых, прямые параллельны или совпадают. Если прямые не совпадают, то они параллельны. Если прямые совпадают, то любая точка одной прямой принадлежит другой прямой.

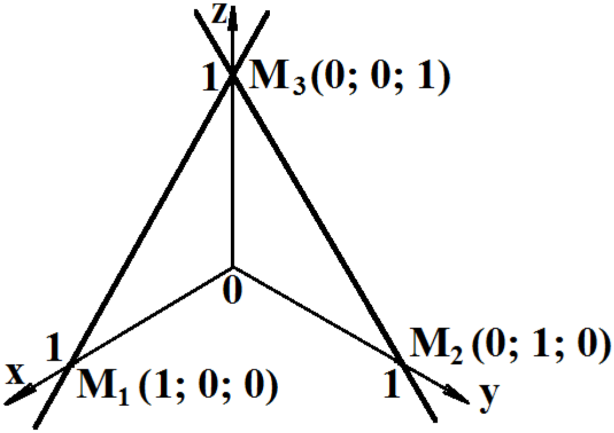
Если $0 < \cos\varphi \le 1$, то угол между прямыми $0^0 < \varphi \le 90^0$, прямые пересекаются или скрещиваются. Если прямые не пересекаются, то они скрещиваются. Если прямые пересекаются, то они имеют общую точку.

Если $\cos\varphi = 0$, то угол φ между прямыми 90^0 (прямые перпендикулярны), прямые пересекаются или скрещиваются.

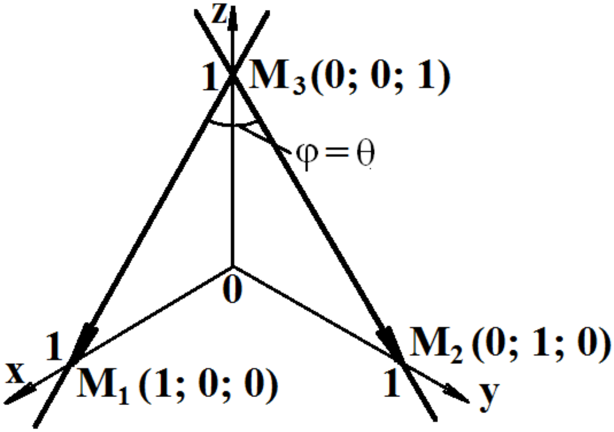
Задача. Определить угол между прямыми M_1M_3 и M_2M_3 с координатами точек $M_1\,(1; 0; 0)$, $M_2\,(0; 1; 0)$ и $M_3\,(0; 0; 1)$.

Решение

Построим заданные точки и прямые в системе координат Oxyz.



Направляющие векторы прямых направим так, чтобы угол θ между векторами совпадал с углом φ между заданными прямыми. Изобразим векторы $\vec{a} = \overrightarrow{M_3M_1}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{M_3M_2}$, а также углы θ и φ:



Определим координаты векторов $\overrightarrow{M_3M_1}$ и $\overrightarrow{M_3M_2}$

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_3M_1} = (1 - 0; 0 - 0; 0 - 1) = (1; 0; -1);$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{M_3M_2} = (0 - 0; 1 - 0; 0 - 1) = (0; 1; -1).$$

Косинус угла между прямыми равен косинусу угла между векторами

$$\cos\varphi = \cos\theta = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

$$\cos\varphi = \cos\theta = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, углы равны

$$\varphi = \theta = 60^0.$$

Ответ: угол между прямыми $\varphi = 60^0$.

1.25 Нормальный вектор прямой

Нормальный вектор прямой - это вектор перпендикулярный прямой.

1.26 Нормальный вектор плоскости

Нормальный вектор плоскости - это вектор перпендикулярный плоскости.

1.27 Общее уравнение плоскости

Общее (нормальное) уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c - координаты нормального ненулевого вектора плоскости $\vec{n}$ (a;b;c) (вектор $\vec{n}$ ненулевой, поэтому его координаты одновременно не равны нулю и его длина в квадрате не равна нулю $|\vec{n}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).

Особые положения плоскости:

- плоскость проходит через начало координат при d = 0 и ax + by + cz = 0;

- плоскость параллельна той оси координат, обозначение которой отсутствует в уравнении плоскости и, следовательно, соответствующий коэффициент равен нулю, например, при c = 0 плоскость параллельна оси Oz и не содержит z в уравнении ax + by + d = 0 ;

- плоскость содержит ту ось координат, обозначение которой отсутствует, следовательно, соответствующий коэффициент равен нулю и d = 0, например, при c = d = 0 плоскость параллельна оси Oz и не содержит z в уравнении ax + by = 0;

- плоскость параллельна координатной плоскости, обозначения которой отсутствуют в уравнении плоскости и, следовательно, соответствующие коэффициенты равны нулю, например, при b = c = 0 плоскость параллельна координатной плоскости Oyz и не содержит y, z в уравнении ax + d = 0.

- если плоскость совпадает с координатной плоскостью, то уравнение такой плоскости представляет из себя равенство нулю обозначения координатной оси, перпендикулярной данной координатной плоскости, например, при x = 0 заданная плоскость является координатной плоскостью Oyz.

Задача. Нормальный вектор задан уравнением

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Представить уравнение плоскости в нормальной форме.

Решение

Координаты нормального вектора

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ 6s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1+s+3t \\ 2+2s-t \\ -1+6s+t \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = (1+s+3t;\ 2+2s-t;\ -1+6s+t)$$

Уравнение плоскости в нормальной форме, проходящей через начало координат

$$(1+s+3t)x + (2+2s-t)y + (-1+6s+t)z = 0.$$

1.28 Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору

Если дана точка M_0 (x_0; y_0; z_0), через которую проходит плоскость перпендикулярно не нулевому вектору $\vec{n}$ (a; b; c), то можно подставить координаты точки M_0 (x_0; y_0; z_0) и координаты a, b, c нормального вектора в общее уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

Получаем уравнение с одной неизвестной d

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

Отсюда

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

Уравнение плоскости (1) после подстановки d

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

Получаем уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (x_0; y_0; z_0) перпендикулярно не нулевому вектору $\vec{n}$ (a; b; c)

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Раскроем скобки

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Обозначим

$$d = - ax_0 - by_0 - cz_0$$

Получим общее уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0.$$

1.29 Уравнение плоскости, перпендикулярной прямой, заданной двумя точками

Заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ образуют нормальный вектор искомой плоскости, определим координаты вектора $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Каждая из его координат равна разности соответствующих координат конца и начала вектора

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (a, b, c)$$

Подставляем координаты нормального вектора в общее уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

и получаем уравнение искомой плоскости, в котором d может быть любым

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (z_1 - z_2)z + d = 0.$$

1.30 Уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка перпендикулярно этому отрезку

Если заданы точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (z_1 - z_2)z + d = 0.$$

Эта плоскость проходит через середину отрезка, образованного заданными точками. Координаты середины отрезка M_1M_2

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \; y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \; z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

Подставим

$$(x_1 - x_2)\cdot\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)\cdot\frac{1}{2}(y_1 + y_2) + (z_1 - z_2)\cdot\frac{1}{2}(z_1 + z_2) + d = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}\right) + \frac{1}{2}\left(y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}\right) + \frac{1}{2}\left(z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2}\right) + d = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}\right) + \left(y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}\right) + \left(z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2}\right)\right) + d = 0$$

Отсюда

$$d = -\frac{1}{2}\left(\left(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}\right) + \left(y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}\right) + \left(z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2}\right)\right)$$

Подставим и получим уравнение плоскости, лежащей на одинаковом расстоянии от двух точек

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (z_1 - z_2)z - \frac{1}{2}\left(\left(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}\right) + \left(y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}\right) + \left(z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2}\right)\right) = 0$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (a, b, c)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

1.31 Определение координаты точки, лежащей на одинаковом расстоянии от двух точек

Искомая точка в любом случае лежит в плоскости, перпендикулярной вектору, образованному заданными точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, и проходит через середину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Уравнение этой плоскости определили выше

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (z_1 - z_2)z - \frac{1}{2}\left(\left(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}\right) + \left(y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}\right) + \left(z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2}\right)\right) = 0$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (a, b, c)$$

$$d = -\frac{1}{2}\left(\left(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}\right) + \left(y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}\right) + \left(z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2}\right)\right)$$

Получили уравнение плоскости, лежащей на одинаковом расстоянии от двух точек

$$ax + by + cz + d = 0$$

Если искомая точка лежит на оси x, то $y = 0$ и $z = 0$

$$ax + d = 0$$

Отсюда координата x

$$x = -\frac{d}{a}$$

Координаты точки (x; 0; 0).

Если искомая точка лежит на оси y, то x = 0 и z = 0

$$by + d = 0$$

Отсюда координата y

$$y = -\frac{d}{b}$$

Координаты точки (0; y; 0).

Если искомая точка лежит на оси z, то x = 0 и y = 0

$$cz + d = 0$$

Отсюда координата z

$$z = -\frac{d}{c}$$

Координаты точки (0; 0; z).

1.32 Уравнение плоскости, проходящей через две точки и начало координат

Определим коэффициенты общего уравнения плоскости

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Систему координат желательно задать так, чтобы плоскость проходила через начало этой системы координат. Точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, лежащие в этой плоскости, необходимо задать так, чтобы прямая, соединяющая эти точки не проходила через начало координат.

Плоскость будет проходить через начало координат, поэтому d = 0. Тогда общее уравнение плоскости принимает вид

$$ax + by + cz = 0.$$

Неизвестно 3 коэффициента a, b, c. Подстановка координат двух точек в общее уравнение плоскости дает систему 2-х уравнений. Если принять какой-то коэффициент в общем уравнении плоскости равным единице, тогда система 2-х уравнений позволит определить 2 неизвестных коэффициента.

Если одна из координат точки нулевая, то за единицу принимается коэффициент, соответствующий этой координате.

Если у какой-то точки две координаты нулевые, то за единицу принимается коэффициент, соответствующий одной из этих нулевых координат.

Если принимается a = 1, тогда система 2-х уравнений позволит определить 2 неизвестных коэффициента b и c:

$$\begin{cases} x_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ x_2 + by_2 + cz_2 = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты ставятся впереди неизвестных, а свободные от неизвестных члены переносятся в правую часть уравнений

$$\begin{cases} y_1 b + z_1 c = -x_1 \\ y_2 b + z_2 c = -x_2 \end{cases}$$

Систему этих уравнений проще решить помножив какое-то уравнение на такое число, чтобы коэффициенты при какой-то неизвестной стали равны. Тогда разность уравнений позволит исключить эту неизвестную, определить другую неизвестную. Подстановка найденной неизвестной в любое уравнение позволит определить и вторую неизвестную.

1.33 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Определим коэффициенты общего уравнения плоскости

$$ax + by + cz + d = 0,$$

проходящей через точки M_1 (x_1; y_1; z_1), M_2 (x_2; y_2; z_2) и M_3 (x_3; y_3; z_3). У точек не должно быть двух одинаковых координат.

Неизвестно 4 коэффициента a, b, c и d. Подстановка координат трех точек в общее уравнение плоскости дает систему 3-х уравнений. Принять какой-то коэффициент в общем уравнении плоскости равным единице, тогда система 3-х уравнений позволит определить 3 неизвестных коэффициента. Обычно принимается a = 1, тогда система 3-х уравнений позволит определить 3 неизвестных коэффициента b, c и d:

$$\begin{cases} x_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ x_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ x_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

Систему уравнений лучше решать методом исключения неизвестных (методом Гаусса). Можно переставлять уравнения в системе. Любое уравнение можно умножить или поделить на любой коэффициент не равный нулю. Любые два уравнения можно сложить и результирующее уравнение записать вместо любого из этих двух складываемых уравнений. Из уравнений исключаются неизвестные, получением нулевого коэффициента перед ними. В одном уравнении, обычно самом нижнем остается одна переменная, которая определяется. Найденная переменная подставляется во второе уравнение снизу, в котором обычно остается 2 неизвестные. Уравнения решаются снизу вверх и определяются все неизвестные коэффициенты.

Коэффициенты ставятся впереди неизвестных, а свободные от неизвестных члены переносятся в правую часть уравнений

$$\begin{cases} y_1 b + z_1 c + d = -x_1 \\ y_2 b + z_2 c + d = -x_2 \\ y_3 b + z_3 c + d = -x_3 \end{cases}$$

В верхнюю строку обычно ставится уравнение, имеющее коэффициент 1 перед первой или любой неизвестной, или все первое уравнение делится на коэффициент перед первой неизвестной. В данной системе уравнений разделим первое уравнение на y_1

$$\begin{cases} \dfrac{y_1}{y_1} b + \dfrac{z_1}{y_1} c + \dfrac{d}{y_1} = -\dfrac{x_1}{y_1} \\ y_2 b + z_2 c + d = -x_2 \\ y_3 b + z_3 c + d = -x_3 \end{cases}$$

Перед первой неизвестной получили коэффициент 1:

$$\begin{cases} b + \dfrac{z_1}{y_1}c + \dfrac{d}{y_1} = -\dfrac{x_1}{y_1} \\ y_2 b + z_2 c + d = -x_2 \\ y_3 b + z_3 c + d = -x_3 \end{cases}$$

Для обнуления коэффициента перед первой переменной второго уравнения помножим первое уравнение на $-y_2$, сложим его со вторым уравнением и полученное уравнение запишем вместо второго уравнения. Первая неизвестная во втором уравнении будет исключена, потому что

$$y_2 b - y_2 b = 0.$$

Аналогично исключаем первую неизвестную в третьем уравнении, помножив первое уравнение на $-y_3$, сложив его с третьим уравнением и полученное уравнение записав вместо третьего уравнения. Первая неизвестная в третьем уравнении будет также исключена, потому что

$$y_3 b - y_3 b = 0.$$

Аналогично исключаем вторую неизвестную в третьем уравнении. Решаем систему снизу вверх.

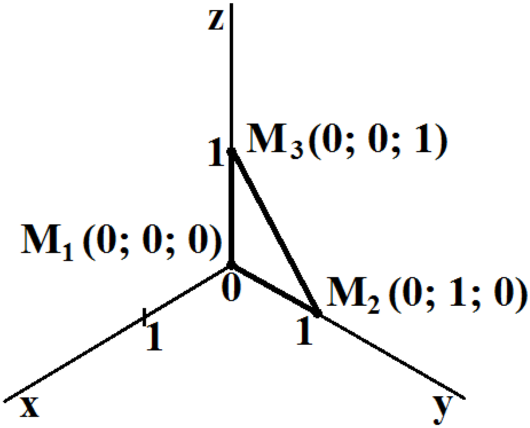
Задача. Определить общее уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0,$$

проходящей через точки $M_1 (0; 0; 0)$, $M_2 (0; 1; 0)$ и $M_3 (0; 0; 1)$.

Решение

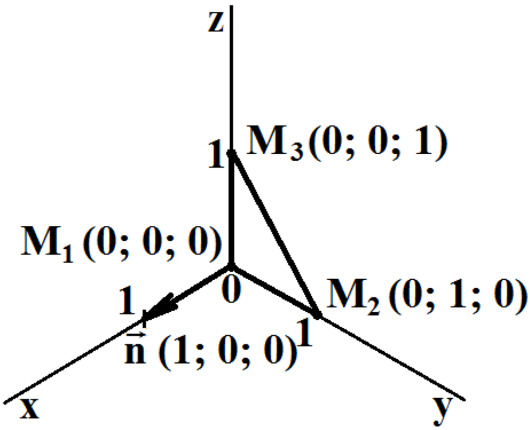
Построим заданные точки в системе координат xyz.



Примем a = 1. Подстановка координат трех точек в общее уравнение плоскости дает систему 3-х уравнений

$$\begin{cases} 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0 \\ 0 + b + c\cdot 0 + d = 0 \\ 0 + b\cdot 0 + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Координаты нормального ненулевого вектора плоскости $\vec{n}$ (1; 0; 0), изобразим его в системе координат



Общее уравнение плоскости

$$x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 = 0$$

$$x = 0.$$

Заданная плоскость является координатной плоскостью Oyz.

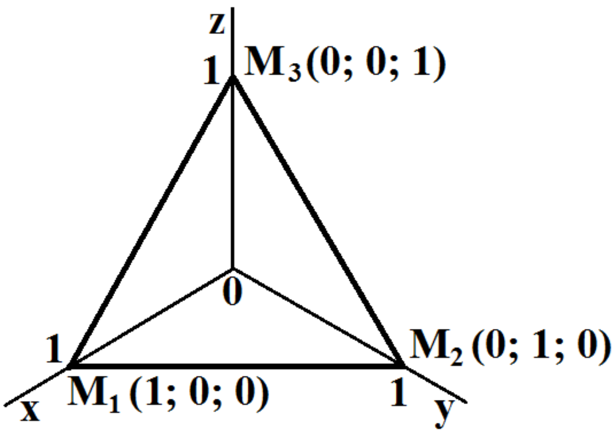
Задача. Определить общее уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0,$$

проходящей через точки M_1 (1; 0; 0), M_2 (0; 1; 0) и M_3 (0; 0; 1). Найти расстояние от этой плоскости до точки M_0(10; -3; -7).

Решение

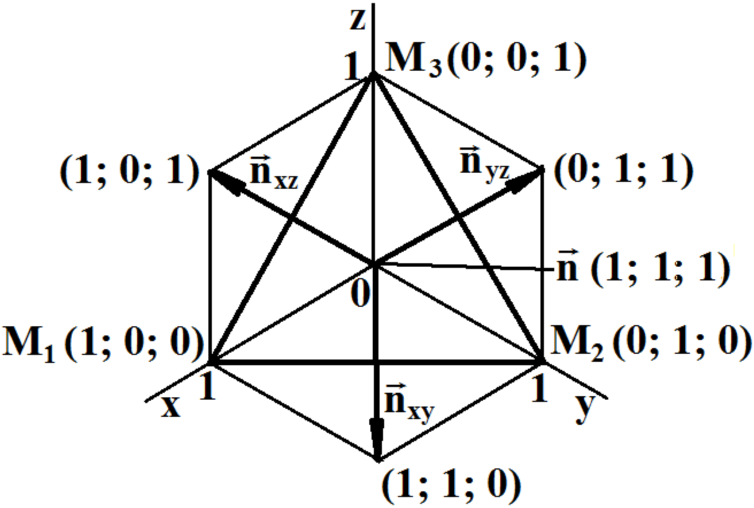
Построим заданные точки в системе координат Oxyz.



Примем a = 1. Подстановка координат трех точек в общее уравнение плоскости дает систему 3-х уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ 1 \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ 1 \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 + d = 0 \\ b + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} d = -1 \\ b = -d = 1 \\ c = -d = 1 \end{cases}$$

Координаты нормального ненулевого вектора плоскости $\vec{n}$ (1; 1; 1), в системе координат он будет изображен точкой, поэтому покажем проекции нормального вектора на плоскости xOy, yOz, xOz.



Общее уравнение плоскости

$$x + y + z - 1 = 0.$$

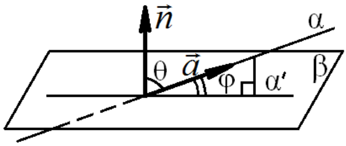
Расстояние от точки M_0 до плоскости

$$\ell = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\ell = \frac{|1\cdot 10 + 1\cdot(-3) + 1\cdot(-7) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1.34 Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой α и плоскостью β равен углу между направляющим вектором прямой $\vec{a}$ и проекцией α' прямой α на плоскость β. Проекция прямой α' на плоскость β лежит в плоскости β, поэтому перпендикулярна вектору $\vec{n}$, нормальному к плоскости β.



Угол θ между направляющим вектором прямой $\vec{a}$ и нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости:

$$\theta = 90^0 - \varphi.$$

Отсюда угол между прямой и плоскостью

$$\varphi = 90^0 - \theta$$

$$\sin\varphi = \sin(90^0 - \theta),$$

но по формуле приведения

$$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta.$$

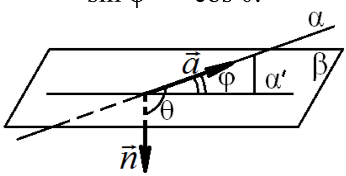
Получаем

$$\sin\varphi = \cos\theta.$$

Если угол между векторами $\theta = 90^0 + \varphi$, тогда угол между прямой и плоскостью равен $\varphi = \theta - 90^0 = -(90^0 - \theta)$.

$$\sin\varphi = \sin(-(90^0 - \theta)) = -\sin(90^0 - \theta) = -\cos\theta.$$

$$\sin\varphi = -\cos\theta.$$



$\varphi \le 90^0$, а $0 \le \theta \le 180^0$, поэтому синус угла между прямой и плоскостью равен модулю косинуса угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости

$$\sin\varphi = |\cos\theta|$$

Если заданы координаты ненулевых векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{n} = (x_2; y_2; z_2)$, то косинус угла θ между ними

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Синус угла между прямой и плоскостью равен модулю косинуса угла между направляющим вектором прямой $\vec{a}$ = (x_1; y_1; z_1) и нормальным вектором $\vec{n}$ = (x_2; y_2; z_2) плоскости $x_2x + y_2y + z_2z + d = 0$

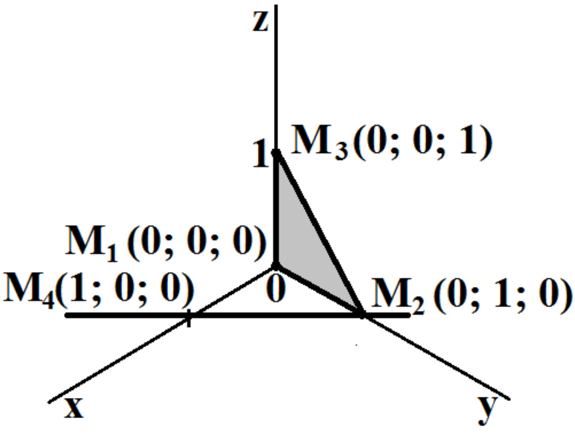
$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\, x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \,|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Прямая и плоскость - это разные геометрические фигуры, поэтому в формуле присутствуют и разные тригонометрические функции.

Задача. Определить угол между плоскостью, проходящей через точки M_1 (0; 0; 0), M_2 (0; 1; 0) и M_3 (0; 0; 1), и прямой, проходящей через точки M_4 (1; 0; 0), M_2 (0; 1; 0).

Решение

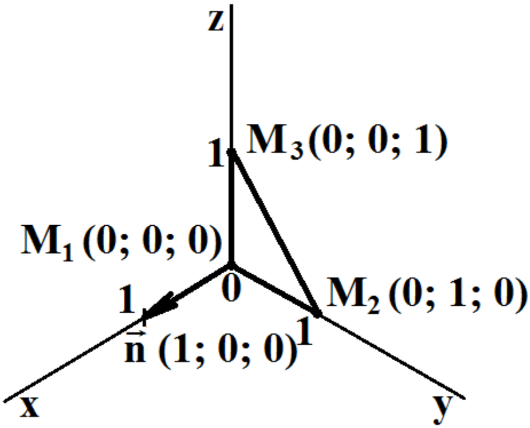
Построим заданные точки, плоскость в виде треугольника, лежащего в ней, прямую в системе координат Oxyz.



Примем a = 1. Подстановка координат трех точек в общее уравнение плоскости ax + by + cz + d = 0 дает систему 3-х уравнений

$$\begin{cases} 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0 \\ 0 + b + c\cdot 0 + d = 0 \\ 0 + b\cdot 0 + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Координаты нормального ненулевого вектора плоскости $\vec{n}$ (1; 0; 0), изобразим его в системе координат



Общее уравнение плоскости

$$x + 0\cdot y + 0\cdot z + 0 = 0$$

$$x = 0.$$

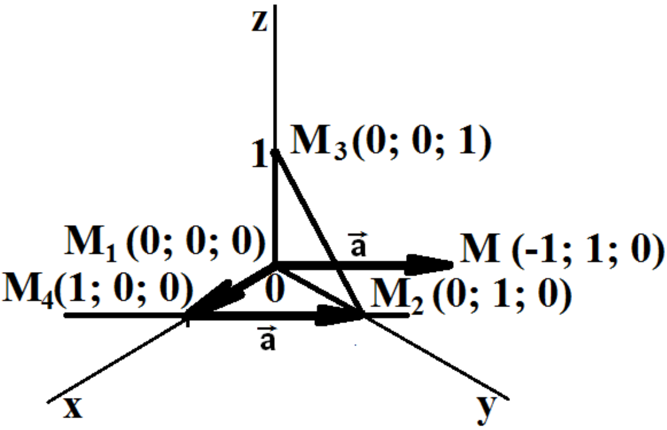
Заданная плоскость является координатной плоскостью Oyz.

Направляющий вектор прямой проходящей через точки M_4(1; 0; 0), M_2 (0; 1; 0) обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{M_4M_2}$. Каждая из его координат равна разности соответствующих координат конца и начала вектора

$$\overrightarrow{M_4M_2} = (x_2 - x_4; y_2 - y_4; z_2 - z_4)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_4M_2} = (0 - 1;\ 1 - 0;\ 0 - 0) = (-1;\ 1;\ 0)$$

Изобразим направляющий вектор прямой в системе координат с началом в точке M_4, с концом в точке M_2 и равный ему вектор из начала координат с концом в точке M (-1; 1; 0)



Если ненулевые векторы $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ и $\vec{n} = \{x_n; y_n; z_n\}$, то косинус угла θ между ними

$$\cos\theta = \frac{x_a x_n + y_a y_n + z_a z_n}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$$

Синус угла между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|x_a x_n + y_a y_n + z_a z_n|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$$

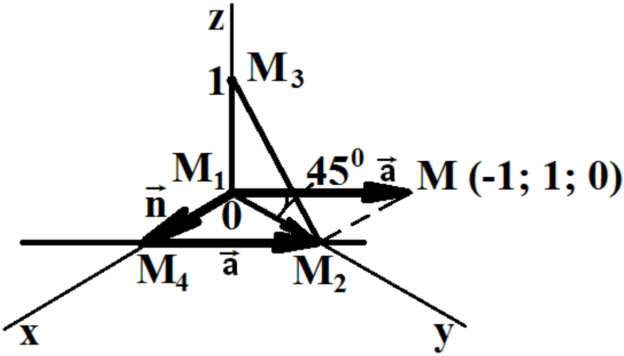
Подставляем координаты направляющего вектора прямой $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\} = \{-1;\ 1;\ 0\}$ и координаты нормального вектора плоскости $\vec{n} = \{x_n; y_n; z_n\} = \{1;\ 0;\ 0\}$.

$$\sin\varphi = \frac{|-1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{|-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 45^0.$$

Изобразим угол между прямой и плоскостью, равный углу между направляющим вектором прямой $\overrightarrow{OM}$ и проекцией $\overrightarrow{OM_2}$ этого вектора на координатную ось Oy.



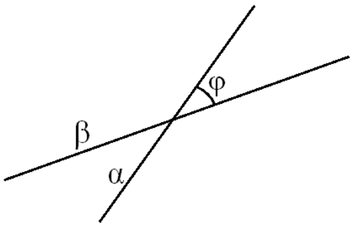
Ответ: угол между прямой и плоскостью $\varphi = 45^0$.

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BCD_1.

1.35 Угол между двумя плоскостями

Две плоскости могут быть параллельны или пересекаться по линии.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями равен углу между двумя пересекающимися прямыми, проведенными перпендикулярно линии пересечения плоскостей.



Поэтому угол между плоскостями $0^0 \le \varphi \le 90^0$.

Если заданы две плоскости

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

и

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

то соответствующие нормальные векторы этих плоскостей $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$. Косинус угла θ между нормальными векторами плоскостей

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Если угол φ между плоскостями α и β равен углу θ между нормальными векторами этих плоскостей φ = θ, то

$$\cos\varphi = \cos\theta.$$

Если угол между плоскостями $\varphi = 180^0 - \theta$, то

$$\cos\varphi = \cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta.$$

$$\cos\varphi = -\cos\theta.$$

Косинус угла между плоскостями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

и

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

равен модулю косинуса угла между нормальными векторами $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ этих плоскостей

$$\cos\varphi = |\cos\theta| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

1.35.1 Алгоритм нахождения угла между двумя плоскостями

1.Задать систему координат с началом на линии пересечения плоскостей.

2.В системе координат построить не менее двух точек, задающих каждую плоскость, между которыми требуется определить угол. Эти две точки необходимо задать так, чтобы прямая, соединяющая эти точки не проходила через начало координат.

2.Определить координаты заданных двух точек для каждой плоскости.

3.Задать один коэффициент уравнения плоскости равным 1, обычно принимается a = 1. Плоскости проходят через начало координат, поэтому d = 0.

4.Составить систему двух уравнений для каждой плоскости.

5.Решить системы уравнений и составить уравнения двух плоскостей, из которых определяются координаты двух нормальных векторов.

6. Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между нормальными векторами этих плоскостей

$$\cos\varphi = |\cos\theta| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Задача. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы ребра: AB = 16, AD = 14, CC_1 = 24. Найти угол между плоскостями ABC и A_1DB.

1.36 Углы между векторами, прямыми и плоскостями

Косинус угла θ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Косинус угла φ между двумя прямыми или двумя плоскостями

$$\cos\varphi = |\cos\theta| = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где θ — угол между направляющими векторами прямых или нормальными векторами плоскостей.

Синус угла φ между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где θ — угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости.

1.37 Расстояние от точки до плоскости

Если известны координаты точки M_0 (x_0; y_0; z_0) и уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), то расстояние от данной точки до плоскости определяется следующим образом.

Проекцией точки M_0 на плоскость является точка M_1 (x_1; y_1; z_1), поэтому вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ перпендикулярен плоскости и коллинеарен нормальному вектору плоскости $\vec{n}$ (a; b; c). Следовательно,

$$\overrightarrow{M_0M_1} = k\vec{n}\,.$$

Расстояние между точкой M_0 и плоскостью равно длине вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, которая равна

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = |k||\vec{n}|$$

Длина нормального вектора

$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = |k|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ равны разности координат конца и начала вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ = ($x_1 - x_0$; $y_1 - y_0$; $z_1 - z_0$), поэтому

$$x_1 - x_0 = ka;\ y_1 - y_0 = kb;\ z_1 - z_0 = kc.$$

$$x_1 = ka + x_0;\ y_1 = kb + y_0;\ z_1 = kc + z_0.$$

Подстановка координат точки M_1 (x_1; y_1; z_1) в уравнение плоскости дает равенство

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

Подставляем полученные ранее значения x_1, y_1, z_1

$$a(ka + x_0) + b(kb + y_0) + c(kc + z_0) + d = 0$$

Путем преобразований выразим k

$$ka^2 + ax_0 + kb^2 + by_0 + kc^2 + cz_0 + d = 0$$

$$ka^2 + kb^2 + kc^2 + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

$$k(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$$

$$k = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|k| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Подставим |k|

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Расстояние от точки M_0 (x_0; y_0; z_0) до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

$$\ell = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Расстояние между точкой и плоскостью равно модулю суммы произведений соответствующих координат нормального вектора и точки плюс d, деленного на длину (модуль) нормального вектора плоскости.

Задача. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды SABCD равны 1. Найти расстояние между плоскостью SAD и серединой ребра AB.

1.38 Правая и левая тройка векторов

Тройкой векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются некомпланарные векторы в указанном порядке, построенные из одной точки.

Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ системы координат xyz всегда образуют тройку векторов.

Если из конца вектора $\vec{c}$ смотреть на плоскость, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути совершается против часовой стрелки, то тройку векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называют правой, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается по часовой стрелки, то тройку векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называют левой.

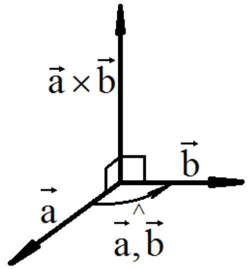
Правая тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ или $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (системы координат xyz) ориентирована также, как большой, указательный и средний пальцы правой руки.

Левая тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ или $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ориентирована также, как большой, указательный и средний пальцы левой руки.

1.39 Векторное произведение векторов

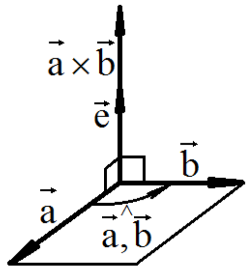
Векторное произведение двух векторов $\vec{a}\times\vec{b}$ – это вектор, перпендикулярный каждому из двух заданных векторов. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ расположены относительно друг друга также как $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна произведению длин заданных векторов на синус угла между ними

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$



Модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также параллельными им отрезками

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$



Векторное произведение векторов равно произведению площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженной на единичный вектор $\vec{e}$ в направлении вектора $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = S\vec{e}$$

Если $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 0^0$, то векторы сонаправлены $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \sin$

$0^0 = 0$, следовательно, векторное произведение двух сонаправленных векторов равно нулевому вектору

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}\ .$$

Если угол между векторами $0 < \widehat{\vec{a},\vec{b}} < 90^0$, то синус угла между такими векторами больше нуля $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) > 0$, следовательно векторное произведение двух таких векторов дает вектор со знаком "плюс". При увеличении угла между векторами $\widehat{\vec{a},\vec{b}}$ от 0^0 до 90^0 $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ также возрастает, поэтому увеличивается и длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

Если два ненулевых векторы перпендикулярны $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 90^0$, то их векторное произведение дает вектор, длина которого равна произведению длин (модулей) заданных векторов $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, так как $\sin 90^0 = 1$.

Если $\widehat{\vec{a},\vec{b}} > 90^0$, то синус угла между такими векторами больше нуля $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) > 0$, следовательно векторное произведение двух таких векторов дает вектор со знаком "плюс". При увеличении угла между векторами $\widehat{\vec{a},\vec{b}}$ от 90^0 до 180^0 $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ уменьшается, поэтому уменьшается и длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

При увеличении угла между двумя векторами синус угла между ними $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ уменьшается и достигает минимального значения при $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 180^0$, когда векторы противоположно направлены $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Так как $\sin 180^0 = 0$, то векторное произведение двух противоположно направленных векторов равно нулевому вектору

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}.$$

В итоге, векторное произведение двух сонаправленных или противоположно направленных, то есть коллинеарных векторов равно нулевому вектору или нулю

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}\ .$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0.$$

Векторное произведение двух перпендикулярных векторов дает вектор, длина которого равна произведению длин (модулей) заданных векторов

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|\ .$$

Векторное произведение двух векторов всегда дает вектор со знаком "плюс". Это значит, что взаимная ориентация трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ всегда такая же как и взаимная ориентация единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и не зависит от угла между заданными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ = (x_1; y_1; z_1) и $\vec{b}$ = (x_2; y_2; z_2) можно определить с помощью символического определителя третьего порядка

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

дает формулу вычисления координат вектора, полученного в результате векторного произведения двух векторов

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}\ ,$$

Координаты вектора $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$y = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Миноры являются определителями второго порядка, поэтому вычисляются следующим образом

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - y_2 z_1$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_1 z_2 - x_2 z_1$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Векторное произведение двух векторов

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

Координаты вектора

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1; -(x_1 z_2 - x_2 z_1); x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1; -x_1 z_2 + x_2 z_1; x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1; x_2 z_1 - x_1 z_2; x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Площадь параллелограмма, образованного двумя векторами $\vec{a}$ = $(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}$ = $(x_2; y_2; z_2)$, определяется по формуле

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

Модуль вектора

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x;y;z)$$

равен корню квадратному из суммы квадратов его координат

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

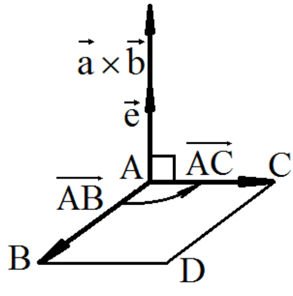
Поэтому площадь параллелограмма, образованного двумя векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

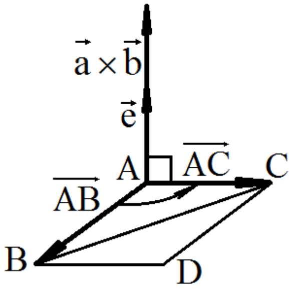
$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

Площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна корню квадратному из суммы квадратов координат вектора $\vec{a}\times\vec{b}=(x;y;z)$

$$S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

Площадь ΔABC равна половине площади параллелограмма ABDC





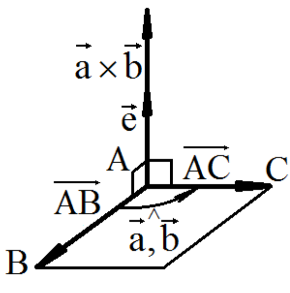
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Если два вектора имеют координаты $\overrightarrow{AB}$ = (x_1; y_1; z_1) и $\overrightarrow{AC}$ = (x_2; y_2; z_2), то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

Модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также параллельными им отрезками

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$



Задача. Вычислить векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ = (0; 3; 4) и $\vec{b}$ = (-1; 0; 2).

Решение

Векторное произведение векторов запишем в виде определителя третьего порядка

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

Для вычисления определителя третьего порядка разложим его по элементам первой строки

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(3\cdot 2-4\cdot 0)\vec{i}-(0\cdot 2-(-1)\cdot 4)\vec{j}+(0\cdot 0-(-1)\cdot 3)\vec{k}=6\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$$

Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ имеет координаты

$$\vec{a}\times\vec{b}=(6; -4; 3).$$

Задача. Вычислить векторное произведение двух векторов $\vec{a}=(1; 0; 0)$ и $\vec{b}=(0; 1; 0)$.

Решение

Вектор $\vec{a}=(1; 0; 0)$ лежит на оси Ох, вектор $\vec{b}=(0; 1; 0)$ лежит на оси Оу.

Векторное произведение векторов запишем в виде определителя третьего порядка

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Для вычисления определителя третьего порядка разложим его по элементам первой строки

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(0\cdot 0-1\cdot 0)\vec{i}-(1\cdot 0-0\cdot 0)\vec{j}+(1\cdot 1-0\cdot 0)\vec{k}=0\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+\vec{k}=\vec{k}$$

Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ лежит на оси Oz, имеет координаты

$$\vec{a}\times\vec{b} = (0;\ 0;\ 1).$$

Задача. Вычислить векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ = (1; 2; 3) и $\vec{b}$ = (2; 4; 6).

Решение

1 способ

Векторное произведение векторов запишем в виде определителя третьего порядка

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{vmatrix}$$

Для вычисления определителя третьего порядка разложим его по элементам первой строки

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}\vec{j}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(2\cdot 6-3\cdot 4)\vec{i}-(1\cdot 6-3\cdot 2)\vec{j}+(1\cdot 4-2\cdot 2)\vec{k}=0\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}=\vec{0}$$

Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ нулевой

$$\vec{a}\times\vec{b} = (0;\ 0;\ 0),$$

следовательно векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные.

2 способ

Координаты вектора $\vec{b}$ в 2 раза больше координат вектора $\vec{a}$, следовательно

$$\vec{b} = 2\vec{a}.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, а точнее сонаправленные. Значит их векторное произведение равно нулю.

Задача. Вычислить векторное произведение двух векторов $\vec{a} = (1; 1; 1)$ и $\vec{b} = (-3; -3; -3)$.

Решение

Координаты вектора $\vec{b}$ получаются из координат вектора $\vec{a}$ путем умножения на коэффициент -3, следовательно

$$\vec{b} = -3\vec{a}.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, а точнее противоположно направленные. Значит их векторное произведение равно нулю.

Задача. Вычислить векторное произведение двух векторов $\vec{a} = (1; 1; 1)$ и $\vec{b} = (-1; 1; 1)$.

Решение

Векторное произведение векторов запишем в виде определителя третьего порядка

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Для вычисления определителя третьего порядка разложим его по элементам первой строки

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)\vec{i} - (1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1))\vec{j} + (1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1))\vec{k} =$$

$$= 0 \cdot \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Координаты вектора

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; -2; 2).$$

Площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна корню квадратному из суммы квадратов координат вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ = (0; -2; 2)

$$S = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}\ .$$

1.40 Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется их векторно-скалярное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = [\,\vec{a} \times \vec{b}\,] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\,\vec{b} \times \vec{c}\,].$$

Смешанное произведение дает число, полученное в результате векторного произведения векторов $\vec{a} \times \vec{b}$, скалярно умноженного на вектор $\vec{c}$ или скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор, полученный в результате векторного произведения $\vec{b} \times \vec{c}$.

Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$$

Смешанное произведение не компланарных векторов не равно нулю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0.$$

Перестановка местами двух векторов приводит к смене знака смешанного произведения

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a} = \vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b} = -\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c} = -\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b} = -\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}\ .$$

Если даны координаты трех векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то смешанное произведение этих векторов вычисляется через определитель третьего порядка

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = x_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2)$$

Геометрически модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

Модуль смешанного произведения трех векторов позволяет перемножать их в произвольном порядке.

Модуль обозначим словом mod, тогда объем параллелепипеда

$$V_{\text{параллелепипеда}} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Если известны 4 точки параллелепипеда $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$, $M_3 = (x_3; y_3; z_3)$ и $M_4 = (x_4; y_4; z_4)$, то для нахождения объема найдем координаты 3-х векторов, образующих параллелепипед

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1)$$

Объем параллелепипеда, образованного векторами $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_4}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов

$$V = |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} \cdot \overrightarrow{M_1M_4}|$$

Объем параллелепипеда

$$V_{\text{параллелепипеда}} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Объем пирамиды

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

с любой фигурой в основании, в том числе и с параллелограммом или треугольником в основании.

Объем параллелепипеда

$$V_{\text{параллелепипеда}} = S_{\text{осн}} h$$

Объем пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с параллелепипедом в основании равен 1/3 модуля смешанного произведения этих векторов

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| = \frac{1}{3} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Объем пирамиды, заданной 4-мя точками $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$, $M_3 = (x_3; y_3; z_3)$ и $M_4 = (x_4; y_4; z_4)$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, поэтому объем пирамиды в основании, которой такой треугольник, будет в 2 раза меньше объема пирамиды, в основании которой исходный параллелограмм. Пирамида, состоящая из 4-х треугольников, называется тетраэдром.

Объем тетраэдра, образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен 1/6 модуля смешанного произведения этих векторов

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Объем тетраэдра, заданного 4-мя вершинами $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$, $M_3 = (x_3; y_3; z_3)$ и $M_4 = (x_4; y_4; z_4)$

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Задача. Найти объем параллелепипеда, объем пирамиды с параллелограммом в основании и объем тетраэдра, построенных на векторах $\vec{a}$ = (-1; -2; 3), $\vec{b}$ = (2; 1; -3) и $\vec{c}$ = (-1; -3; 2).

Решение

Объем параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен модулю смешанного произведения этих векторов

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1\cdot2 - (-3)\cdot(-3)) + 2\cdot(2\cdot2 - (-1)\cdot(-3)) + 3\cdot(2\cdot(-3) - (-1)\cdot1) =$$
$$= -(2 - 9) + 2\cdot(4 - 3) + 3\cdot(-6 + 1) = 7 + 2 - 15 = -6.$$

Объем параллелепипеда

$$V = |-6| = 6 \text{ ед}^3.$$

Объем пирамиды с параллелограммом в основании

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}| = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2 \text{ ед}^3.$$

Объем тетраэдра

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}| = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1 \text{ ед}^3.$$

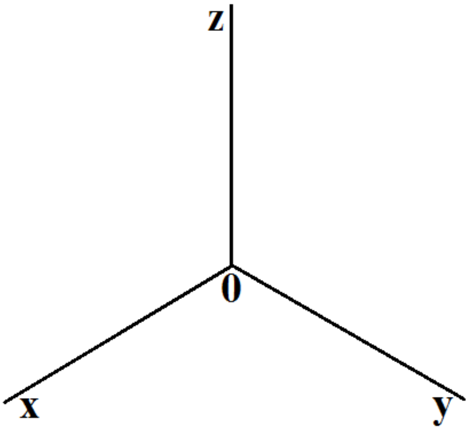
2 Решение геометрических задач с помощью векторов

1.Выбрать удобное расположение трехмерной системы координат.

2.Определить координаты точек, выбирая масштаб единичных отрезков так, чтобы как можно больше координат точек были равны единице. Обычно требуется определить координаты двух точек, задающих прямую или трех точек, определяющих плоскость.

3.По координатам точек определить направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости.

4.Решить задачу координатным методом.



2.1 Взаимное расположение прямых в пространстве

Возможные варианты взаимного расположения 2-х прямых в пространстве:

1. Прямые не лежат в одной плоскости, следовательно, скрещиваются.
2. Прямые лежат в одной плоскости, поэтому могут:
    1. Пересекаться.
    2. Совпадать.
    3. Быть параллельны.

Если одна прямая задана двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то направляющий вектор этой прямой имеет координаты

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Если вторая прямая также задана двумя точками $M_3(x_3; y_3; z_3)$ и $M_4(x_4; y_4; z_4)$, то направляющий вектор этой прямой имеет координаты

$$\overrightarrow{M_3M_4} = (x_4 - x_3; y_4 - y_3; z_4 - z_3).$$

Проведем третий вектор, связывающий две точки, лежащие на разных прямых, например, $\overrightarrow{M_1M_3}$ с координатами

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Если векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_3M_4}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ не компланарны, то прямые скрещиваются. Смешанное произведение не компланарных векторов не равно нулю

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_3M_4} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} \neq 0.$$

Если смешанное произведение векторов равно нулю

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_3M_4} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0,$$

то прямые лежат в одной плоскости.

Если не выполняется условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ = $k \cdot \overrightarrow{M_3M_4}$, то прямые пересекаются. В противном случае направляющие векторы коллинеарны, а прямые параллельны или совпадают.

Чтобы убедиться в совпадении этих прямых, можно в каноническое уравнение первой прямой

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

подставить координаты одной точки, задающей вторую прямую, например $M_3(x_3; y_3; z_3)$. Если отношения

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

равны, то прямые имеют по крайней мере одну общую точку M_3, следовательно, совпадают.

Если отношения в каноническом уравнении не равны, то точка второй прямой не принадлежит первой прямой, следовательно, прямые параллельны.

Консультации Ольшевского Андрея Георгиевича по Skype da.irk.ru

1. Подготовка студентов и школьников по математике, физике, информатике, школьников желающих получить много баллов (часть С) и слабых учеников к ОГЭ (ГИА) и ЕГЭ. Одновременное улучшение текущей успеваемости путем развития памяти, мышления, понятного объяснения сложного, наглядного преподнесения предметов. Особый подход к каждому ученику. Подготовка к олимпиадам, обеспечивающим льготы при поступлении. 15-летний опыт улучшения успеваемости учеников.

2. Высшая математика, алгебра, геометрия, теория вероятностей, математическая статистика, линейное программирование.

3. Понятное объяснение теории, ликвидация пробелов в понимании, обучение приемам решения задач, консультирование при написании курсовых, дипломов.

4. Авиационные, ракетные и автомобильные двигатели. Гиперзвуковые, прямоточные, ракетные, импульсные детонационные, пульсирующие, газотурбинные, поршневые двигатели внутреннего сгорания - теория, конструкция, расчет, прочность, проектирование, технология изготовления. Термодинамика, теплотехника, газовая динамика, гидравлика.

5. Авиация, аэромеханика, аэродинамика, динамика полета, теория, конструкция, аэрогидромеханика. Сверхлегкие летательные аппараты, экранопланы, самолеты, вертолеты, ракеты, крылатые ракеты, аппараты на воздушной подушке, дирижабли, винты - теория, конструкция, расчет, прочность, проектирование, технология изготовления.

6. Генерация, внедрение идей. Основы научных исследований, методы генерации, внедрения научных, изобретательских, бизнес идей. Обучение приемам решения научных проблем, изобретательских задач. Научное, изобретательское, писательское,

инженерное творчество. Постановка, выбор, решение наиболее ценных научных, изобретательских задач, идей.

7. Публикации результатов творчества. Как написать и опубликовать научную статью, подать заявку на изобретение, написать, издать книгу. Теория написания, защиты диссертаций. Зарабатывание денег на идеях, изобретениях. Консультирование при создании изобретений, написании заявок на изобретения, научных статей, заявок на изобретения, книг, монографий, диссертаций. Соавторство в изобретениях, научных статьях, монографиях.

8. Теоретическая механика (теормех), сопротивление материалов (сопромат), детали машин, теория механизмов и машин (ТММ), технология машиностроения, технические дисциплины.

9. Теоретические основы электротехники (ТОЭ), электроника, основы цифровой, аналоговой электроники.

10. Аналитическая геометрия, начертательная геометрия, инженерная графика, черчение. Компьютерная графика, программирование графики, чертежи в Автокад, Нанокад, фотомонтаж.

11. Логика, графы, деревья, дискретная математика.

12. OpenOffice и LibreOffice Basic, Visual Basic, VBA, NET, ASP.NET, макросы, VBScript, Бэйсик, С, С++, Делфи, Паскаль, Delphi, Pascal, C#, JavaScript, Fortran, html, Маткад. Создание программ, игр для ПК, ноутбуков, мобильных устройств. Использование бесплатных готовых программ, движков с открытыми исходными кодами.

13. Создание, размещение, раскрутка, программирование сайтов, интернет-магазинов, заработки на сайтах, Web-дизайн.

14. Информатика, пользователь ПК: тексты, таблицы, презентации, обучение методу скоропечатания за 2 часа, базы данных, 1С,

Windows, Word, Excel, Access, Gimp, OpenOffice, Автокад, nanoCad, Интернет, сети, электронная почта.

15. Устройство, ремонт компьютеров стационарных и ноутбуков.

16. Видеоблогер, создание, редактирование, размещение видео, видеомонтаж, зарабатывание денег на видеоблогах.

17. Выбор, достижение целей, планирование.

18. Обучение зарабатыванию денег в Интернет: блогер, видеоблогер, программы, сайты, интернет-магазин, статьи, книги и др.

Skype: da.irk.ru

Сайты: www.super-code.ru   www.da.irk.ru

 e-mail: da.irk.ru@mail.ru