© Ольшевский Андрей Георгиевич
Консультирую по скайп: da.irk.ru

Дискретная математика

Иркутск
2017

Оглавление

Введение

1 Алгебра логики

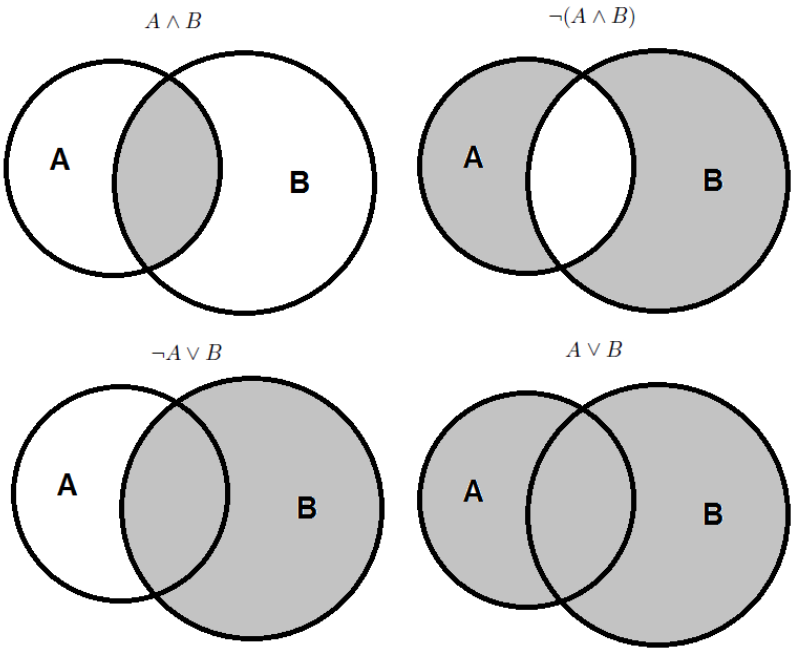
1.1 Логические операции в порядке убывания приоритета

1.Инверсия (логическое отрицание) - логическая операция, которая данное высказывание преобразует в противоположное высказывание. Обозначается словами или символами: НЕ, NOT, ⎤, ¬, верхнее подчеркивание ().
Например: НЕ А, NOT А, , ⎤А, ¬А.
2.Конъюнкция (логическое умножение) обозначается словами или символами: И, AND, &, ·, *, ∧, ∏, ∩.
Например: А И В, А AND В, А & В, А · В, А * В, А ∧ В, А ∏ В, А ∩ В.
∩ - математический знак, обозначающий пересечение.
3.Дизъюнкция (логическое сложение) обозначается словами или символами: ИЛИ, OR, +, ∨, U, ∑.
Например: А ИЛИ В, А OR В, А + В, А ∨ В, А U В.
U - математический знак, обозначающий объединение.
4.Импликация (если А, то В) обозначается символами: =>, →.
5.Эквиваленция (А тогда и только тогда, когда В) обозначается словами или символами: <=>, ↔, ~, ≡.

1.2 Приоритет логических операций

Порядок выполнения логических операций определяют круглые скобки и порядок логических операций. Сначала выполняется операция отрицания (“не”), за ней - конъюнкция (“и”), затем — дизъюнкция (“или”), затем — импликация (→) и в последнюю очередь — эквивалентность ≡.

2 Диаграммы Венна или в некоторых источниках Виенна, или Эйлера-Венна

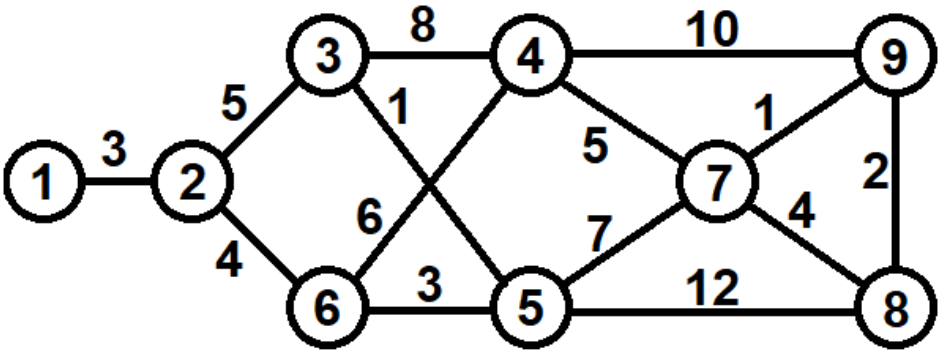


3 Графы

3.1 Радиус, диаметр и центры графа

Эксцентриситет вершины графа — расстояние до максимально удаленной от нее вершины. Радиус графа — минимальный эксцентриситет вершин, а диаметр графа — максимальный эксцентриситет вершин. Центр графа образуют вершины, у которых эксцентриситет равен радиусу. Центр графа может состоять из одной, нескольких или всех вершин графа [Кирсанов М. Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы. — М.: Издательство ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 168 с.].

Задача. Дан граф с заданным весом ребер



Найти радиус, диаметр и центры графа.

Решение

Заданы веса ребер, поэтому граф называется взвешенный. Программа на C++ в Visual Studio 2013:

```
#include "stdafx.h" // Visual Studio 2013
#include "algorithm" // для min, max в Visual Studio 2013
#include "iostream" // Visual Studio 2013
using namespace std;
int main(){
```

```
        const int N = 9; // Количество вершин в графе
const int INF = 100000; // Число большее длины любого пути в графе
        int i, j, k;
        int d[9][9] = {
                { 0, 3, INF, INF, INF, INF, INF, INF, INF },
                { 3, 0, 5, INF, INF, 4, INF, INF, INF },
                { INF, 5, 0, 8, 1, INF, INF, INF, INF },
                { INF, INF, 8, 0, INF, 6, 5, INF, 10 },
                { INF, INF, 1, INF, 0, 3, 7, 12, INF },
                { INF, 4, INF, 6, 3, 0, INF, INF, INF },
                { INF, INF, INF, 5, 7, INF, 0, 4, 1 },
                { INF, INF, INF, INF, 12, INF, 4, 0, 2 },
                { INF, INF, INF, 10, INF, INF, 1, 2, 0 }
        }; // Дистанции (вес) в графе
        int    e[N]; // Эксцентриситет вершин
        int    c[N]; // Центры графа
        int    rad = INF; // Радиус графа
        int    diam = 0; // Диаметр графа
        // Алгоритм Флойда-Уоршелла
        for (int k = 0; k<N; ++k)
                for (int i = 0; i<N; ++i)
                        for (int j = 0; j<N; ++j)
                                d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]);
        // Нахождение эксцентриситета

        for (int i = 0; i < N; i++) {
                for (int j = 0; j < N; j++) {
                        e[i] = max(e[i], d[i][j]);
                }
        }
```

```
        // Нахождение диаметра и радиуса
        for (int i = 0; i < N; i++) {
                rad = min(rad, e[i]);
                diam = max(diam, e[i]);
        }
        cout << "Diameter: " << diam << endl;
        cout << "Radius: " << rad << endl;
        // Центры графа
        cout << "Centers: ";
        for (int i = 0; i < N; i++) {
                if (e[i] == rad) {
                        cout << i << "\t";
                }
        }
        system("pause"); // Visual Studio 2013
        return 0;
}
```

3.2 Остовные деревья

Остовное дерево неориентированного связного графа (spanning tree) G - его подграф, содержащий все вершины графа G и ребра графа G, не образующие циклы. Остов графа является деревом.

Задача. Построить все остовные деревья неориентированного графа из предыдущей задачи.

Решение

Алгоритм порождения всех каркасов неориентированного графа [Окулов С. М. Программирование в алгоритмах [Электронный ресурс] / С. М. Окулов.—5-е изд. (эл.).—М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—383 с.] реализован на C++ в Visual Studio 2013:

```
#include "stdafx.h"
#include "iostream"
using namespace std;

const bool Zero = 0; // Ноль
const int N = 9; // число узлов графа
bool A[N][N] =
{
        { 0, 1, Zero, Zero, Zero, Zero, Zero, Zero, Zero },
        { 1, 0, 1, Zero, Zero, 1, Zero, Zero, Zero },
        { Zero, 1, 0, 1, 1, Zero, Zero, Zero, Zero },
        { Zero, Zero, 1, 0, Zero, 1, 1, Zero, 1 },
        { Zero, Zero, 1, Zero, 0, 1, 1, 1, Zero },
        { Zero, 1, Zero, 1, 1, 0, Zero, Zero, Zero },
        { Zero, Zero, Zero, 1, 1, Zero, 0, 1, 1 },
        { Zero, Zero, Zero, Zero, 1, Zero, 1, 0, 1 },
        { Zero, Zero, Zero, 1, Zero, Zero, 1, 1, 0 }
}; // Матрица смежности
bool Nnew[N]; // признак, просмотрена вершина графа или нет
int  Turn[N]; // очередь
int  Tree[2][N]; // список ребер, образующих каркас
int  Down; // нижний указатель
int  Up; // верхний указатель
int  numb; // число ребер в строящемся каркасе
int AllTrees; // Всего остовных деревьев
int i, k;

void Solve(int v, int q) // Номера вершин: v - из которой выходит ребро,
// q - начиная с которой следует искать очередное ребро каркаса
{
```

```
        int j;
        if (Down >= Up) return;
        j = q;
        while (j < N && numb<N - 1)
        {
                // Просмотр ребер, выходящих из вершины v
                if (A[v][j] != 0 && !Nnew[j])
                {
// Ребро включаем в каркас, так как вершина с номером j еще не в каркасе
                        Nnew[j] = true;
                        numb++;
                        Tree[0][numb] = v;
                        Tree[1][numb] = j;
                        Turn[Up] = j; Up++; // Включаем вершину j в очередь

                        Solve(v, j + 1); // Продолжаем построение каркаса
                        // Исключаем ребро из каркаса:
                        Up--; Nnew[j] = false; numb--;
                }
                j++;
        }
        if (numb == N - 1) // вывод каркаса
        {
                AllTrees = AllTrees + 1;
                cout << "Tree N= " << AllTrees << endl;
                for (i = 1; i <= numb; i++)
                cout << Tree[0][i] + 1 << " " << Tree[1][i] + 1 << endl;
                return;
        }
        /*Все ребра, выходящие из вершины с номером v, просмотрены.
        Переходим к следующей вершине из очереди и так до тех пор,
```

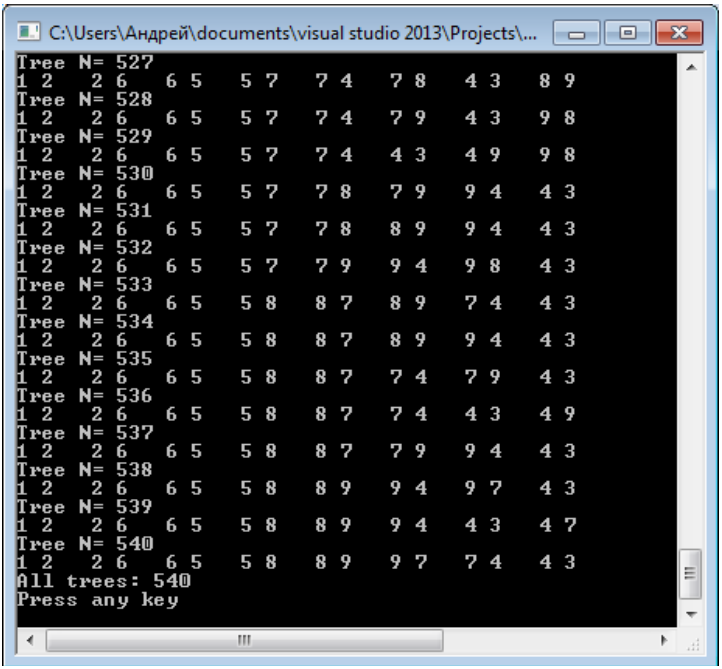
```
        пока не будет построен каркас.*/
        if (j = N + 1)
        {
                Down++;
                Solve(Turn[Down], 1);
                Down--;
        }
}

void main()
{
        Nnew[0] = true;
        Nnew[1] = false;
        Turn[0] = 0; Down = 0; Up = 1; // в очередь первую вершину
        numb = 0;
        AllTrees = 0;

        cout << "N*N: " << endl;
        for (i = 0; i<N; i++)
        {
                for (k = 0; k<N; k++)
                        cout << " " << A[i][k]; // Матрица смежности графа
                cout << endl;
        }

        Solve(Down, Up);
        cout << "All trees: " << AllTrees << endl;
        cout << "Press any key " << endl;
        system("pause>>void");
}
```

Конец выполнения программы:



3.3 Остов минимального веса. Алгоритм Крускала

Остовом минимального веса является остов, содержащий ребра с минимальным весом.

Алгоритм Крускала используется для построения графа минимального веса. Для этого к пустому графу на множестве вершин заданного графа G присоединяются ребра, выбирая всякий раз ребра минимального веса, не образующие циклов с ранее присоединенными ребрами.

4 Элементы теории кодирования. Схема кодирования и декодирования

1. Исходное сообщение.
2. Кодирование сообщения кодом, контролирующим ошибки ($d \geq 3$). Например, кодом Хэминга.
3. Передача по информационному каналу или хранение сообщения (могут появиться ошибки).
4. Оценка кодового слова и исправление ошибок при их наличии средствами контроля и исправления ошибок кода.
5. Декодирование сообщения.
6. Выходное сообщение = исходному сообщению.

5 Код Хэмминга

Пусть r – контрольные биты (разряды, символы, позиции), тогда

$n = 2^r - 1$ – длина кодовых слов,

$k = 2^r - 1 - r = n - r$ – число информационных битов,

получаем (n, k) – код Хэмминга.

d – минимальное кодовое расстояние (число позиций, в которых отличаются любые два кодовых слова между собой), для кода Хэмминга d = 3.

(n, k) – код с минимальным кодовым расстянием d можно назвать (n, k, d) – кодом.

Примеры кодов Хэмминга:

r	(n;	k)- код
2	3	1
3	7	4
4	15	11
5	31	26
6	63	57
7	127	120

6 Граница Синглтона линейного кода

Граница Синглтона, названная в честь Сиглтона Р. К., устанавливает минимальное число контрольных символов в коде, контролирующем ошибки.

Код, содержащий алфавит из q элементов, называется q-ичным кодом. Если q = 2, то это двоичный код. Возможное число слов длиной n (мощность кода), составленных из q-ичного алфавита равно q^n.

Пример двоичного кода, состоящего из 2 битов (разрядов, символов, позиций):

$$\left.\begin{matrix}00\\01\\10\\11\end{matrix}\right\} 2^2 = 4 слова$$

Если во всех словах кода убрать d – 1 символов, то оставщиеся n – (d - 1) символы представляют слова, отличающиеся как минимум в 1 позиции. Мощность (максимальное количество слов) такого кода $q^{n-(d-1)}$.

Информационные символы в коде занимают k позиций. Возможное число слов (мощность) длиной k равна q^k. Для линейных кодов граница Синглтона:

$$q^k \le q^{n-(d-1)}.$$

$q > 1$, следовательно

$$k \le n - (d - 1).$$

В неравенстве

$$n - k \ge d - 1$$

n - k - это количество добавочных контрольных символов кода, контролирующего ошибки.

Заключение

Список использованных источников с моими комментариями

Окулов С. М. Программирование в алгоритмах [Электронный ресурс] / С. М. Окулов.—5-е изд. (эл.).—М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—383 с.

Дискретная математика для школьников с алгоритмами на Паскале.

Калужнин Л.А. Что такое математическая логика? - М.: Наука, 1964. - 152 с.

Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. - М.: Вузовская книга, 2000. - 280 с.

Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. - М.: Наука, 1972. - 288 с.

Никольская И.Л. Математическая логика: Учебник. - М.: Высшая школа, 1981. - 127 с.

Зуев Ю.А. По океану дискретной математики: от перечислительной комбинаторики до современной криптографии. 2 тома. – М.: «Либроком», 2012.

Захарова Л.Е. Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. – Моск. гос. ин-т электроники и математики. М., 2002, 120 с.

На Паскаль реализованы многие алгоритмы, графы. Имеется не большой список литературы, который полезно просмотреть.

Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теория алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 1999. 128 с.

Хорошо представлена теория множеств, но некоторые значки не привычные.

Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теория алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. М.: МЦНМО, 1999. 176 с.

Графы

Кирсанов М. Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы. — М.: Издательство ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 168 с.

Лаконично описана теория графов

Тюкарева М.Н. Метрические свойства графов. Дипломная работа. – Казань, 2014 - 32 с.

Подробно теория графов и алгоритмы определения радиуса, диаметра, центров графа

Альпин Ю.А., Ильин С.Н. Дискретная математика: графы и автоматы. Учебное пособие. — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2006. — 78 с

Лаконично!

Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978, - 432 с.

Консультации Ольшевского Андрея Георгиевича по Skype da.irk.ru

1. Авиационные, ракетные и автомобильные двигатели. Гиперзвуковые, прямоточные, ракетные, импульсные детонационные, пульсирующие, газотурбинные, поршневые двигатели внутреннего сгорания - теория, конструкция, расчет, прочность, проектирование, технология изготовления. Термодинамика, теплотехника, газовая динамика, гидравлика.

2. Авиация, аэромеханика, аэродинамика, динамика полета, теория, конструкция, аэрогидромеханика. Сверхлегкие летательные аппараты, экранопланы, самолеты, вертолеты, ракеты, крылатые ракеты, аппараты на воздушной подушке, дирижабли, винты - теория, конструкция, расчет, прочность, проектирование, технология изготовления.

3. Генерация, внедрение идей. Основы научных исследований, методы генерации, внедрения научных, изобретательских, бизнес идей. Обучение приемам решения научных проблем, изобретательских задач. Научное, изобретательское, писательское, инженерное творчество. Постановка, выбор, решение наиболее ценных научных, изобретательских задач, идей.

4. Публикации результатов творчества. Как написать и опубликовать научную статью, подать заявку на изобретение, написать, издать книгу. Теория написания, защиты диссертаций. Зарабатывание денег на идеях, изобретениях. Консультирование при создании изобретений, написании заявок на изобретения, научных статей, заявок на изобретения, книг, монографий, диссертаций. Соавторство в изобретениях, научных статьях, монографиях.

5. Теоретическая механика (теормех), сопротивление материалов (сопромат), детали машин, теория механизмов и машин (ТММ), технология машиностроения, технические дисциплины.

6. Теоретические основы электротехники (ТОЭ), электроника,

основы цифровой, аналоговой электроники.

7. Подготовка студентов по физике, математике, информатике, школьников желающих получить много баллов (часть С) и слабых учеников к ОГЭ (ГИА) и ЕГЭ. Одновременное улучшение текущей успеваемости путем развития памяти, мышления, понятного объяснения сложного, наглядного преподнесения предметов. Особый подход к каждому ученику. Подготовка к олимпиадам, обеспечивающим льготы при поступлении. 15-летний опыт улучшения успеваемости учеников.

8. Высшая математика, алгебра, геометрия, теория вероятностей, математическая статистика, линейное программирование.

9. Аналитическая геометрия, начертательная геометрия, инженерная графика, черчение. Компьютерная графика, программирование графики, чертежи в Автокад, Нанокад, фотомонтаж.

10. Логика, графы, деревья, дискретная математика.

11. OpenOffice и LibreOffice Basic, Visual Basic, VBA, NET, ASP.NET, макросы, VBScript, Бэйсик, C, C++, Делфи, Паскаль, Delphi, Pascal, C#, JavaScript, Fortran, html, Маткад. Создание программ, игр для ПК, ноутбуков, мобильных устройств. Использование бесплатных готовых программ, движков с открытыми исходными кодами.

12. Создание, размещение, раскрутка, программирование сайтов, интернет-магазинов, заработки на сайтах, Web-дизайн.

13. Информатика, пользователь ПК: тексты, таблицы, презентации, обучение методу скоропечатания за 2 часа, базы данных, 1С, Windows, Word, Excel, Access, Gimp, OpenOffice, Автокад, nanoCad, Интернет, сети, электронная почта.

14. Устройство, ремонт компьютеров стационарных и ноутбуков.

15. Видеоблогер, создание, редактирование, размещение видео, видеомонтаж, зарабатывание денег на видеоблогах.

16. Понятное объяснение теории, ликвидация пробелов в понимании, обучение приемам решения задач, консультирование при написании курсовых, дипломов.

17. Выбор, достижение целей, планирование.

18. Обучение зарабатыванию денег в Интернет: блогер, видеоблогер, программы, сайты, интернет-магазин, статьи, книги и др.

Skype: da.irk.ru

Сайты: www.super-code.ru www.da.irk.ru